4. ÜBUNG ZUR MENGENLEHRE

Sabine Koppelberg
Ausgabe: 10. 11. 2011
Besprechung am 17. 11. 2011

In den Aufgaben 13 bis 15 befassen wir uns mit weniger trivialen Beispielen von induktiv definierten Funktionen.

Aufgabe 13. X und Y seien wohlgeordnete Klassen. Beweisen Sie den Vergleichbarkeitssatz 5.6 der Vorlesung folgendermaßen: nehmen Sie an, dass Y zu keinem echten Anfangsstück von X isomorph ist, und definieren Sie induktiv eine Funktion $F : X \to Y$, die Isomorphismus von X auf ein Anfangsstück von Y ist. Dieser Beweis ist Ihnen wahrscheinlich anschaulicher als der im Skript, der ohne den Rekursionssatz funktioniert.

Aufgabe 14. Wir setzen die Menge $\mathbb{N}$ und ihre übliche Wohlordnung $<$ als bekannt voraus; für den Nachfolger von $x \in \mathbb{N}$ schreiben wir wie üblich $x+1$ (statt x'). Zeigen Sie, dass es genau eine Funktion $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt mit

$$a(0,x) = x+1, \quad a(i+1,0) = a(i,1), \quad a(i+1,x+1) = a(i,a(i+1,x))$$

für alle $i, x \in \mathbb{N}$ – die so genannte Ackermannfunktion. Genauer: finden Sie eine Wohlordnung $<$ auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und definieren Sie a durch Induktion über diese, nach 6.3 des Skripts.

Falls Sie diese Funktion noch nicht kannten, versuchen Sie, den Wert $a(4,2)$ zu berechnen!

Aufgabe 15. Wir setzen die wohlgeordnete Menge $(\mathbb{N}, <)$ als bekannt voraus. 0 ist das kleinste Element von $\mathbb{N}$; für $x \in \mathbb{N}$ sei x' der unmittelbare Nachfolger von x und $1 = 0'$. Die Addition auf $\mathbb{N}$ ist induktiv definiert durch

$$x + 0 = x, \quad x + y' = (x+y)'.$$

Beweisen Sie durch Induktion, dass $1 + x = x'$ für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt und die Addition assoziativ und kommutativ ist.

Dazu müssen Sie evtl. einige Hilfsbehauptungen finden und induktiv beweisen und die "richtige" Reihenfolge für die zu beweisenden Behauptungen beachten.

Hier setzen wir die Aufgaben 8 und 12 fort.

Aufgabe 16. Wir arbeiten weiter mit der Struktur $\mathcal{M} = (\mathbb{N}, \varepsilon)$ aus Aufgabe 8 bzw. 12. Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}$ Modell des Aussonderungs- und des Ersetzungsaxioms ist.

Aufgabe 16′. Sei X eine transitive echte Klasse und $\in_X$ Wohlordnung auf X. Zeigen Sie, dass dann X die Klasse aller Ordinalzahlen ist.