3. ÜBUNG ZUR MENGENLEHRE

Sabine Koppelberg
Ausgabe: 3. 11. 2011
Besprechung am 10. 11. 2011

Aufgabe 9. X und Y seien wohlgeordnete echte Klassen. Beweisen Sie, dass X und Y dann isomorph sind. Welches Axiom geht dabei massiv ein?

Aufgabe 10. $(X, <_X)$ und $(Y, <_Y)$ seien wohlgeordnete Klassen und $X \cap Y = \emptyset$. Auf $X \cup Y$ definieren wir die Relation $<$ durch

$$x < y \leftrightarrow (x \in X, y \in Y) \text{ oder } (x, y \in X, x <_X y) \text{ oder } (x, y \in Y, x <_Y y).$$

Ist $(X \cup Y, <)$ dann Wohlordnung?

Aufgabe 11. $(X, <)$ und $(Y, <)$ seien total geordnete Klassen. Finden Sie heraus, in welchen Fällen $X \times Y$, mit der lexikographischen Ordnung, wohlgeordnete Klasse ist! (Dazu sollten Sie unterscheiden, ob X bzw. Y Menge oder echte Klasse ist.)

Hier setzen wir Aufgabe 8 fort.

Aufgabe 12. Wir arbeiten weiter mit der Struktur $\mathcal{M} = (\mathbb{N}, \varepsilon)$ aus Aufgabe 8.
(a) Berechnen Sie für $a = 10 \in \mathbb{N}$ alle Elemente und alle Teilmengen von a im Sinne von $\mathcal{M}$ und daraus $\bigcup a$ und $P(a)$ im Sinne von $\mathcal{M}$.
(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}$ Modell des Vereinigungs- und des Potenzmengenaxioms ist.

Aufgabe $12'$**.** Konstruieren Sie
(a) zwei verschiedene Wohlordnungen $<_1$ und $<_2$ auf der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen, so dass $(\mathbb{Q}, <_1)$ und $(\mathbb{Q}, <_2)$ isomorph sind
(b) zwei Wohlordnungen $<_1$ und $<_2$ auf $\mathbb{Q}$, so dass $(\mathbb{Q}, <_1)$ und $(\mathbb{Q}, <_2)$ nicht-isomorph sind
(c) eine Wohlordnung auf der Menge S aller endlichen geordneten Folgen über der Menge $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ der natürlichen Zahlen.