1. ÜBUNG ZUR MENGENLEHRE

Sabine Koppelberg
Ausgabe am 17. 10. 2011
Besprechung am 27. 10. 2011

In diesem Blatt geht es um das Rechnen mit Klassen, geordnete Paare, sowie die Axiome (Ext) bis (Ver).

Aufgabe 1. Beweisen Sie die Rechengesetze 1.3(a), (d) und (f) des Skripts.

Aufgabe 2. C und D seien beliebige Klassen. Beweisen oder widerlegen Sie (durch Gegenbeispiele) die Aussagen
(a) $\bigcup(C \cup D) = \bigcup C \cup \bigcup D$
(b) $\bigcap(C \cup D) = \bigcap C \cap \bigcap D$
(c) $\bigcup(C \cap D) = \bigcup C \cap \bigcup D$
(d) $\bigcap(C \cap D) = \bigcap C \cap \bigcap D$.

Aufgabe 3. Für beliebige Mengen a und b setzen wir

$$[a,b] = \{\{a\},\{b\},\{a,b\}\}, \quad \langle a,b\rangle = \{a,\{a,b\}\}$$

Gilt für diese "Paar"bildungen die Eigenschaft des geordneten Paars aus Satz 2.1? Sie dürfen voraussetzen, dass für beliebige Mengen x und y gilt: $x \notin x$; aus $x \in y$ folgt $y \notin x$. (Diese Voraussetzung wird später aus dem so gen. Fundierungsaxiom folgen.)

In Aufgabe 4 und späteren, daran anschließenden, werden wir einfache Unabhängigkeitsfragen klären. Dabei benutzen wir einige in der Vorlesung offiziell noch nicht entwickelte Begriffe und Mengen. Ist M eine Menge und ε eine zweistellige Relation auf M, so kann man in der Struktur (M,ε) die Begriffe der Mengenlehre interpretieren: man nennt die Elemente von M "Mengen" (im Sinne von (M,ε)). Liegen a und b in M, so heiße a "Element" von b, falls $a\varepsilon b$ (d.h. $(a,b) \in \varepsilon$) gilt.
Beispiel: M habe genau drei Elemente a,b,c; es sei $\varepsilon = \{(a,b),(a,c)\}$. In (M,ε) ist (Ext) falsch, denn b und c haben i.S. von (M,ε) genau die gleichen Elemente (nämlich nur a), aber $b \neq c$.
Alternativ zu diesem Aufgabentyp dürfen Sie die jeweils gestrichelten Aufgaben bearbeiten.

Aufgabe 4. Für Elemente a,b der Teilmengen $M = \mathbb{Q}$, $N = \mathbb{N}$ und $M = \{0,1\}$ von $\mathbb{R}$ gelte $a \ \varepsilon \ b$ genau dann, wenn $a < b$. Prüfen Sie, ob in diesen Strukturen die Axiome (Ext), (Null), (Pa), (Aus) gelten, und erklären Sie, dass (Pa) nicht aus (Ext), (Null), (Aus) folgt.

Aufgabe $4'$**.** Für jede Menge x sei $\mathcal{P}(x) = \{y : y \subseteq x\}$. Wir definieren $a = \emptyset$, $b = \mathcal{P}(a)$, $c = \mathcal{P}(b)$ und $d = \mathcal{P}(c)$.
Zeigen Sie, nur unter Benutzung der Axiome (Ext), (Null), (Pa) und (Ver), dass a,b,c,d Mengen sind.