21. Anwendungen von Martins Axiom in Topologie, Mengenlehre und Maßtheorie

Außer der Anwendung 20.6 (Nichtexistenz von Souslin-Bäumen), aus der MA als Verallgemeinerung entstand, hat es zahlreiche weitere Konsequenzen, in die wir hier eine Einführung geben.

<u>21.1 Def, Bem</u> $(X, \mathcal{O})$ sei ein topologischer Raum ($\mathcal{O}$ ist die Familie der in X offenen Mengen).
$(X, \mathcal{O})$ erfüllt die <u>ccc</u>, falls jede Familie von paarweise disjunkten nichtleeren offenen Mengen in X abzählbar ist.
Jeder separable Raum ccc (Beweis wie in 17.1(c)), etwa $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \ldots$ z.B. erfüllt
Jede Souslin-Ordnung ist in ihrer Ordnungstopologie ccc.
Der <u>Satz von Baire</u> sagt: ist X lokal kompakt oder vollständig metrisierbar, so ist der Schnitt von abzählbar vielen dichten offenen Mengen in X nichtleer (sogar wieder dicht). Er folgt als Spezialfall aus 22.2.
(Beachte noch: sind $U_1, \ldots, U_n \subseteq X$ dicht offen, so auch $U_1 \cap \ldots \cap U_n$!)

<u>21.2 Satz</u> ($MA(\kappa)$) Sei X kompakter T_2-Raum mit ccc, $(U_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ sei Familie von offenen dichten Teilmengen von X.
Dann ist $\bigcap_{\alpha<\kappa} U_\alpha$ dicht in X.
Beweis. $(P, \subseteq)$ mit $P := \{u \subseteq X : \emptyset \neq u \text{ offen}\}$ erfüllt (also $P\mathcal{O}$) die ccc (denn in P gilt: $u \perp v \Leftrightarrow u \cap v = \emptyset$).
Für jeden Filter $G \subseteq P$ ist (wie im Beweis von 19.5(c))

$$M_G := \bigcap_{u\in G} \overline{u} \neq \emptyset,$$

da X kompakt ist. Für $\alpha < \kappa$ ist

$$D_\alpha := \{u \in P : \overline{u} \subseteq U_\alpha\}$$

dicht in P (da X als kompakter T_2-Raum regulär ist).
Sei nun $G \subseteq P$ Filter, der alle D_α $(\alpha<\kappa)$ schneidet; dann ist

$$\emptyset \neq M_G \subseteq \bigcap_{\alpha<\kappa} U_\alpha$$

und damit $\bigcap_{\alpha<\kappa} U_\alpha \neq \emptyset$ [für $\alpha<\kappa$ nimm $u \in G \cap D_\alpha$; für dies u ist $M_G \subseteq \overline{u} \subseteq U_\alpha$].

Dass $\bigcap_{\alpha<\kappa} U_\alpha$ sogar dicht in X ist, sieht man, indem man, für $U \subseteq X$ offen und nichtleer, ein offenes V mit $\emptyset \neq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ wählt. Man ersetzt X durch $Y := \overline{V}$ (Y erfüllt wieder die ccc!) und U_α durch $V_\alpha := U_\alpha \cap Y$. Jedes $x \in \bigcap_{\alpha<\kappa} V_\alpha$ ist Element von $\bigcap_{\alpha<\kappa} U_\alpha$ und liegt in $Y = \overline{V} \subseteq U$; also ist $U \cap \bigcap_{\alpha<\kappa} U_\alpha \neq \emptyset$.

∎

Dieser Satz lässt sich auch auf lokal kompakte T_2-Räume X zeigen (z.B. für $X = \mathbb{R}$) – man relativiere den Beweis auf kompakte $\overline{V}$ mit $V \subseteq X$ offen.

Hat X eine abzählbare Basis, so gilt in 22.2 sogar eine stärkere Aussage: es gibt eine Familie $(V_n)_{n\in\omega}$ von dichten offenen Teilmengen von X mit $\bigcap_{n\in\omega} V_n \subseteq \bigcap_{\alpha<\kappa} U_\alpha$.

In 21.8 und 21.9 wenden wir MA an, um kombinatorische Aussagen über die Potenzmenge $P(\omega)$ zu zeigen. Wir benutzen dazu die folgende pO P_A. Dabei sei

$$\boxed{A \subseteq P(\omega)}.$$

<u>21.3 Def + L</u> (a) Definiere die pO $(P_A, \leq)$ durch

$$P_A := \{(s, X) : s \subseteq \omega \text{ endlich},\ X \subseteq A \text{ endlich}\}$$

(geordnetes Paar)

$$(t, Y) \leq (s, X) :\Leftrightarrow s \subseteq t,\ X \subseteq Y,$$
f. alle $a \in X$ ist $a \cap t \subseteq s$
(d.h. $t \cap \bigcup X = s \cap \bigcup X$).

(b) (s, X) und (t, Y) sind in $(P_A, \leq)$ genau dann verträglich, wenn $t \cap \bigcup X \subseteq s$ und $s \cap \bigcup Y \subseteq t$. Dann ist $(s \cup t, X \cup Y)$ gemeinsame untere Schranke von (s, X) und (t, Y).

(c) $(P_A, \leq)$ erfüllt die ccc.

Beweis. (a) Wir zeigen die Transitivität von $\leq$. Sei also $(u, Z) \leq (t, Y)$ und $(t, Y) \leq (s, X)$. Dann ist $s \subseteq t \subseteq u$ und $X \subseteq Y \subseteq Z$, also $s \subseteq u$ und $X \subseteq Z$. Ferner $t \cap \bigcup Y = u \cap \bigcup Y$. Wegen $X \subseteq Y$ ist $\bigcup X \subseteq \bigcup Y$, und es folgt $t \cap \bigcup X = u \cap \bigcup X$.

Damit
$$s \cap \bigcup X = t \cap \bigcup X = u \cap \bigcup X,$$
also $(u, Z) \leq (s, X)$.

(b) Sei (u, Z) untere Schranke von (s, X) und (t, Y). Dann ist $s \cup t \subseteq u$ und
$$t \cap \bigcup X \subseteq u \cap \bigcup X \subseteq s,$$
analog folgt $s \cap \bigcup Y \subseteq t$.
Ist umgekehrt $t \cap \bigcup X \subseteq s$ und $s \cap \bigcup Y \subseteq t$, so ist $(s \cup t, X \cup Y) \leq (s, X)$, denn
$$(s \cup t) \cap \bigcup X \subseteq (s \cap \bigcup X) \cup (t \cap \bigcup X) \subseteq s.$$
Analog folgt $(s \cup t, X \cup Y) \leq (t, Y)$.

(c) (b) zeigt, dass (s, X) und (t, Y) jedenfalls verträglich sind, wenn $s = t$. Sei nun $W \subseteq P_A$ und $|W| = \omega_1$. Da $|\{s \subseteq \omega : s$ endlich$\}| = \omega$, existieren $(s, X) \neq (t, Y)$ in W mit $s = t$. Sie sind verträglich, damit also W keine Antikette in $(P_A, \leq)$. ∎

<u>22.4 Def + L</u> Für $a \in A$ ist
$$D_a := \{(s, X) \in P_A : a \in X\}$$
dicht (in $(P_A, \leq)$).

Beweis. Für jedes $(s, X) \in P_A$ ist $(s, X \cup \{a\}) \in D_A$, und $(s, X \cup \{a\}) \leq (s, X)$. ∎

<u>22.5 Def + L</u>. Für einen beliebigen Filter G in $(P_A, \leq)$ sei $d_G \subseteq \omega$ definiert durch
$$d_G := \bigcup_{(s,X) \in G} s$$
Ist $G \cap D_a \neq \emptyset$ (D_a aus 22.4) ist $d_G \cap a$ endlich.

Beweis. Nimm ein
$$(s, X) \in G \cap D_a;$$
wir zeigen $d_G \cap a \subseteq s$. – Sei also $n \in d_G \cap a$ (zeige $n \in s$). Wegen $n \in d_G$ existiert $(t, Y) \in G$ mit $n \in t$. Da G Filter, gibt es $(u, Z) \in G$ mit
$$(u, Z) \leq (s, X), (t, Y).$$
Es ist $n \in t \subseteq u$ und (wegen $(u, Z) \leq (s, X)$, $a \in X$) $n \in u \cap a \subseteq s$. ∎

Die wesentliche kombinatorische Anwendung von MA ist folgende.

22.6 Satz (MA_κ) Seien $A, C \subseteq P(\omega)$ mit $|A|, |C| \leq \kappa$. Für jedes $c \in C$ und jedes endliche $X \subseteq A$ gelte
$$|c \setminus \bigcup X| = \omega.$$
Dann gibt es ein $d \subseteq \omega$ mit
$$a \in A \Rightarrow |a \cap d| < \omega$$
$$c \in C \Rightarrow |c \cap d| = \omega.$$

Beweis: Für das gegebene $A \subseteq P(\omega)$ betrachte die pO $(P_A, \leq)$ aus 22.3. Außer den D_a sind auch folgende Teilmengen E_{cn} dicht in P_A (für $c \in C$, $n \in \omega$):
$$E_{cn} := \{(s, X) \in P_A : \text{es ex. } k \in s \cap c,\ k \geq n\}.$$
$\ulcorner$ sei $(s, X) \in P_A$. Wegen $|c \setminus \bigcup X| = \omega$ nimm
$$k \in c \setminus \bigcup X, \quad k \geq n.$$
Dann ist
$$(s \cup \{k\}, X) \leq (s, X) \qquad \ulcorner k \notin \bigcup X \lrcorner$$
und $(s \cup \{k\}, X) \in E_{cn}$ $\lrcorner$.

Wegen $|A|, |C| \leq \kappa$ und MA_κ nehmen wir einen Filter $G \subseteq P_A$, der alle D_a $(a \in A)$ und alle E_{cn} $(c \in C, n \in \omega)$ schneidet. $d := d_G$ ist wie gewünscht. Denn $|a \cap d| < \omega$ für $a \in A$ nach 22.5.
Sei $c \in C$ und $n \in \omega$ (wir finden $k \in c \cap d$ mit $k \geq n$).
Dazu sei $(s, X) \in G \cap D_{cn}$ gewählt, mit $k \in s \cap c$. Es gibt also $k \geq n$ und
$$k \in s \subseteq d_G \qquad \ulcorner (s, X) \in G \lrcorner$$
$$= d.$$

Für attraktive mengentheoretische Konsequenzen von MA benutzen wir folgende Begriffe.

22.7 Def (a) $a, b \subseteq \omega$ heißen _fast disjunkt_ (<u>al</u>most <u>dis</u>joint), falls $|a| = |b| = \omega$, aber $|a \cap b| < \omega$. $A \subseteq P(\omega)$ heißt fast disjunkt (ad), falls für $a \neq b$ in A a und b fast disjunkt sind.

(b) $A \subseteq P(\omega)$ ist maximal fast disjunkt (mad), falls: A ad ist und $A' = A$ für jedes ad A' mit $A \subseteq A'$. Nach dem Zornschen Lemma lässt sich jedes ad A zu einem mad A' erweitern.

(c) Es gibt ein ad $A \subseteq P(\omega)$ mit $|A| = 2^\omega$; statt auf ω konstruieren wir A auf dem Baum $T := \bigcup {}^n 2$ (siehe 18.3); denn $|T| = \omega$. Für jedes $f : \omega \to 2$ ist nun nämlich

$$a_f := \{f \upharpoonright n : n \in \omega\} \subseteq T$$

unendlich. $A := \{a_f \mid f : \omega \to 2\}$ ist ad, und $|A| = 2^\omega$.

<u>22.8 Korollar</u> (zu 22.6) (MA) Jede unendliche mad Familie $A \subseteq P(\omega)$ hat die Mächtigkeit 2^ω.

Beweis. Wäre $|A| = \kappa < 2^\omega$, so betrachte man in 22.6 $C := \{\omega\}$. MA_κ liefert, nach 22.6, ein $d \subseteq \omega$, das zu allen $a \in A$ fast disjunkt ist.

<u>22.9 Satz</u> (a) Aus MA_κ folgt $2^\kappa = 2^\omega$. (Aus MA also: $2^\kappa = 2^\omega$ für alle κ mit $\omega \leq \kappa < 2^\omega$.)

(b) Aus MA folgt: 2^ω ist regulär.

Beweis (a) Gelte MA_κ. Nach 22.7(c) können wir ein fast disjunktes $B \subseteq P(\omega)$ mit $|B| = \kappa$ wählen. Für jedes $A \subseteq B$ können wir auf A und $C := B \setminus A$ Satz 22.6 anwenden (denn B ist fast disjunkt) und erhalten ein $d_A \subseteq \omega$, so dass für alle $b \in B$:

$$b \in A \iff |b \cap d_A| < \omega,$$

d.h.

$$A = \{b \in B : |b \cap d_A| < \omega\}.$$

(d_A "codiert" $A \subseteq B$). Damit ist Abbildung

$$\left.\begin{array}{ccc} P(B) & \to & P(\omega) \\ A & \mapsto & d_A \end{array}\right\}$$

injektiv, und $2^\kappa = |P(B)| \leq |P(\omega)| = 2^\omega$.

(b) folgt aus (a): wäre $\kappa := cf(2^\omega) < 2^\omega$, so folgte $2^\kappa = 2^\omega$ nach (a) und

$$\kappa = cf(2^\omega) = cf(2^\kappa),$$

im Widerspruch zum Satz von König ($cf(2^\kappa) > \kappa$)!

In der letzten Anwendung von MA sprechen wir über das Lebesguesche Maß λ auf $\mathbb{R}$. Wir benutzen einige einfache Tatsachen über das Lebesguesche Maß, insbesondere:

$\lambda(\mathcal{U})$ ist für alle offenen $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$ definiert

$\lambda((a,b)) = b-a$ (für $a<b$ in $\mathbb{R}$, $(a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a<x<b\}$)

$\lambda(N) = 0 \iff$ für jedes $\varepsilon > 0$ ex. $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$ offen mit $N \subseteq \mathcal{U}$, $\lambda(\mathcal{U}) < \varepsilon$

λ ist σ-additiv und σ-stetig.

__21.10 Satz__ (MA_κ) Für $\alpha < \kappa$ sei $N_\alpha \subseteq \mathbb{R}$ mit $\lambda(N_\alpha) = 0$. Dann ist auch $\lambda(N) = 0$ für $N := \bigcup_{\alpha<\kappa} N_\alpha$.

(Für $\kappa = \omega$ folgt dies einfach aus der σ-Additivität des Maßes: $\lambda(\bigcup_{n\in\omega} N_n) \leq \sum_{n\in\omega} \lambda(N_n) = 0$.)

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben (wir suchen $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$ offen mit $N \subseteq \mathcal{U}$, $\lambda(\mathcal{U}) \leq \varepsilon$). Hierzu benutzen wir die abzählbare Basis

$$\mathcal{B} := \{(a,b) : a<b \text{ in } \mathbb{Q}\}$$

von $\mathbb{R}$, sowie

$$\mathcal{C} := \{u_1 \cup \dots \cup u_n : n \in \omega, u_i \in \mathcal{B}\};$$

auch $\mathcal{C}$ ist abzählbar.

__1. $(P, \leq)$__ Setze (für das gegebene $\varepsilon > 0$)

$$P := \{p \subseteq \mathbb{R} : p \text{ offen}, \lambda(p) < \varepsilon\}.$$

$(P, \supseteq)$ ist p.O. Für $p, q \in P$ gilt

$$p \parallel q \text{ (d.h. ex. } r \leq p,q) \iff \lambda(p \cup q) < \varepsilon.$$

__2. P erfüllt die ccc__ Sei nämlich $X \subseteq P$, $|X| = \omega_1$; finde $p \neq q$ in X mit $p \parallel q$.

Es ist $X = \bigcup_{n\in\omega} X_n$, wobei $X_n := \{p \in X : \lambda(p) \leq \varepsilon - \frac{2}{n}\}$.

Nimm ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|X_n| = \omega_1$.

Für $p \in X_n$ wähle $c_p \in \mathcal{C}$ mit

$$c_p \subseteq p, \quad \lambda(p \setminus c_p) \leq \frac{1}{n}$$

$\ulcorner$das geht, da p Vereinigung von Elementen von $\mathcal{B}$ ist und λ σ-stetig ist$\lrcorner$. Wegen $|X_n| = \omega_1$ und $|\mathcal{C}| = \omega$ gibt es $p \neq q$ in X_n mit $c_p = c_q$. Nun ist $p \parallel q$, denn

$$\begin{aligned} p \cup q &= c_p \cup c_q \cup (p \setminus c_p) \cup (q \setminus c_q) \\ &= c_p \cup (p \setminus c_p) \cup (q \setminus c_q) \\ &= p \cup (q \setminus c_q), \end{aligned}$$

$$\lambda(p \cup q) \leq \lambda(p) + \lambda(q \setminus c_q) \leq \varepsilon - \frac{2}{n} + \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

3. D_α (für $\alpha < \kappa$) Setze für $\alpha < \kappa$

$$D_\alpha := \{p \in P : N_\alpha \subseteq p\}.$$

D_α ist dicht in P: sei $p \in P$. Nimm $v \subseteq \mathbb{R}$ offen mit $N_\alpha \subseteq v$, $\lambda(v) < \varepsilon - \lambda(p)$. Es ist $q := p \cup v \in P$ (denn $\lambda(q) \leq \lambda(p) + \lambda(v) < \varepsilon$) und $p \subseteq q$, d.h. $q \leq p$.

Und $N_\alpha \subseteq v \subseteq q$, also $q \in D_\alpha$.

4. G und $\mathcal{U}_G = \mathcal{U}$ Nimm (wegen MA_κ) einen Filter $G \subseteq P$ mit $G \cap D_\alpha \neq \emptyset$ für $\alpha < \kappa$. Setze

$$\mathcal{U}_G := \mathcal{U} := \bigcup_{p \in G} p.$$

$\mathcal{U}$ ist offen.

5. $N \subseteq \mathcal{U}$ Sei $\alpha < \kappa$ (zeige $N_\alpha \subseteq \mathcal{U}$). Nimm dazu ein $p \in G \cap D_\alpha$. Es ist $N_\alpha \subseteq p \subseteq \mathcal{U}$.

6. $\lambda(\mathcal{U}) \leq \varepsilon$ Betrachte dazu

$$H := G \cap \mathcal{B}.$$

Es ist $\mathcal{U} = \bigcup_{p \in G} p = \bigcup_{p \in H} p$

⌈Sei $x \in \mathcal{U}$, etwa $x \in p$, $p \in G$. $\mathcal{B}$ ist Basis von $\mathbb{R}$, und p offen, nimm also $v \in \mathcal{B}$ mit $x \in v \subseteq p$. Damit $v \in P$ und $p \leq v$; da G Filter, ist $v \in G$ (also $v \in H$). Und $x \in v \subseteq \bigcup_{p \in H} p$. ⌋.

H ist abzählbar, schreibe $H = \{h_n : n \in \omega\}$. Wegen der σ-Stetigkeit von λ ist

$$\lambda(\mathcal{U}) = \lambda\Big(\bigcup_{i \in \omega} h_i\Big) = \sup_{n \in \omega} \lambda(h_0 \cup \ldots \cup h_n).$$

Für $\lambda(\mathcal{U}) \leq \varepsilon$ brauchen wir nur $\lambda(h_0 \cup \ldots \cup h_n) \leq \varepsilon$ zu zeigen. Aber:

$h_0 \ldots h_n \in H \subseteq G$, G Filter

es ex. $p \in G$ mit $p \leq h_0, \ldots, h_n$

(d.h. $h_0 \cup \ldots \cup h_n \subseteq p$)

wegen $p \in G \subseteq P$ ist $\lambda(p) < \varepsilon$, also $\lambda(h_0 \cup \ldots h_n) < \varepsilon$.

∎