## 20. Martins Axiom

Das Martinsche Axiom MA ist aus dem Versuch entstanden, Modelle der ZFC-Axiome zu finden, in denen kein Souslin-Baum existiert. Es stellte sich heraus, dass viele weitere kombinatorische (auch topologische und maßtheoretische) Probleme mit MA gelöst werden können. Oft kann man MA als (schwächeren) Ersatz von CH ($2^{\omega}=\omega_1$) benutzen.

**20.1 Def** Sei $(P,<)$ eine partielle (d.h. Halb-)Ordnung.

(a) $p,q \in P$ heißen <u>unverträglich</u> ($p \perp q$), falls es kein $r \in P$ mit $r \leq p,q$ gibt, sonst verträglich ($p \parallel q$).

(In einem Baum $(T,<)$ gilt also: $p \parallel q$ in $(T,>)$ $\Leftrightarrow$ $p \leq q$ oder $q \leq p$, s. Kapitel 19).

(b) $A \subseteq P$ ist <u>Antikette</u> in $P$, falls $p \perp q$ für alle $p \neq q$ in $A$ gilt.

$P$ erfüllt die <u>ccc</u>, falls jede Antikette von $P$ abzählbar ist.

**20.2 Beispiel** $(X,<)$ sei dichte lineare Ordnung,

$$P := \{I \subseteq X : I = (a,b) \text{ mit } a<b\}$$

die Menge aller nichtleeren offenen Intervalle. $(P, \subsetneq)$ ist partielle Ordnung. Sie erfüllt genau dann die ccc, wenn $(X,<)$ (i.S. von Kapitel 17) die ccc erfüllt (denn für $I,J \in P$ ist $I \perp J \Leftrightarrow I \cap J = \emptyset$).

**20.3 Def** $(P,<)$ sei Halbordnung.

(a) $D \subseteq P$ heißt <u>dicht</u> (in $P$), falls zu jedem $p \in P$ ein $d \in D$ mit $d \leq p$ existiert.

(b) $G \subseteq P$ heißt ein <u>Filter</u> (in $P$), falls:

(1) $G \neq \emptyset$ (2) $p \in G,\ q \in P,\ p \leq q \Rightarrow q \in G$

(3) zu $p,q \in G$ ex. $r \in G$ mit $p,q \geq r$ (insbesondere sind die Elemente von $G$ paarweise verträglich).

(c) Sei $\mathcal{D}$ eine Familie von Teilmengen von $P$. Ein Filter $G \subseteq P$ heißt <u>$\mathcal{D}$-generisch</u>, falls $G \cap D \neq \emptyset$ für alle $D \in \mathcal{D}$.

**21.4 Def** (a) Sei $\kappa$ eine unendliche Kardinalzahl. $MA_\kappa$ ist die Aussage

($MA_\kappa$) $\left\{\begin{array}{l}\text{Ist } (P,<) \text{ eine Halbordnung mit ccc und } \mathcal{D} \text{ eine} \\ \text{Familie von dichten Teilmengen von } P \text{ mit } |\mathcal{D}| \leq \kappa, \\ \text{so existiert ein } \mathcal{D}\text{-generischer Filter in } P.\end{array}\right.$

(b) MA (Martins Axiom) ist die Aussage

(MA) $MA_\kappa$ gilt für alle $\kappa < 2^\omega$.

Die Einschränkung auf $\kappa < 2^\omega$ ist wegen der folgenden Bemerkung sinnvoll.

**21.5 Bem** (a) Aus $\kappa \leq \kappa'$ und $MA_{\kappa'}$ folgt $MA_\kappa$.
(b) $MA_\omega$ ist (in ZFC) wahr. (Daher gilt $ZFC + CH \vdash MA$.)
(c) $MA_{2^\omega}$ ist falsch.

Beweis. (a) ist trivial.
(b) Sei $\mathcal{D} = \{D_n : n \in \omega\}$ Familie von dichten Teilmengen von $(P,<)$. (In dieser Überlegung wird die ccc für $P$ nicht benötigt.) Konstruiere $p_0 \geq p_1 \geq p_2 \geq \ldots$ in $P$ mit

$p_0 \in D_0$ [o.E., da $D_0$ dicht, also $D_0 \neq \emptyset$]

ist $p_n \in D_n$ konstruiert, so nimm $d_{n+1} \in D_{n+1}$ mit $p_n \geq p_{n+1}$ [o.E., da $D_{n+1}$ dicht].

$G := \{p \in P : \text{es ex. } n \in \omega \text{ mit } p_n \leq g\}$ ist Filter, und wegen $p_n \in D_n \cap G$ ist $G \cap D_n \neq \emptyset$ für $n \in \omega$.

(c) Im Beispiel 21.2 setzen wir $X := \mathbb{R}$. Die partielle Ordnung $P$ erfüllt ccc (denn $\mathbb{R}$ ist separabel; s. Kapitel 17).
Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist

$$D_x := \{I = (a,b) \in P : a > x \text{ oder } b < x\}$$

dicht in $P$.
Ist $G \subseteq P$ Filter, so existiert

$$a_G \in \mathbb{R} \text{ mit } a_G \in \bigcap_{(a,b) \in G} [a,b]$$

[die $I \in G$ sind paarweise verträglich!]. Anm.: $G \cap D_x \neq \emptyset$ für jedes $x \in \mathbb{R}$. Betrachte $a := a_G$. Wegen $G \cap D_a \neq \emptyset$ nimm $I = (c,d) \in G \cap D_a$. Wegen $I \in G$ ist $a \in [c,d]$,

wegen $I \in D_a$ ist $a < c$ oder $d < a$, in beiden Fällen $a \notin [c,d]$, Widerspruch!
(Und $|\{D_x : x \in \mathbb{R}\}| \le |\mathbb{R}| = 2^\omega$.)

Mit Hilfe der so gen. iterierten Forcing-Methode (s. Vorlesung "Modelle der Mengenlehre") kann man zeigen, dass MA (zu ZFC relativ) widerspruchsfrei ist, d.h.

$$\text{ZFC widerspruchsfrei} \Rightarrow \text{ZFC} + \text{MA} + \omega_1 < 2^\omega \text{ widerspruchsfrei.}$$

In der letzteren Theorie lässt sich das Souslinsche Problem recht einfach lösen:

<u>20.6 Satz</u> Die Souslinsche Hypothese (es gibt keinen Souslin-Baum) folgt aus $\text{MA} + \omega_1 < 2^\omega$ (genauer aus $\text{MA}_{\omega_1}$).

Beweis. Falls es einen Souslin-Baum gibt, so gibt es auch einen guten Souslin-Baum $(T,<)$ (siehe ⊛). $(T,>)$ erfüllt die ccc. Da $T$ gut ist, ist für jedes $\alpha < \omega_1$

$$D_\alpha := \{x \in T : ht_T(x) \ge \alpha\}$$

dicht in $(T,>)$. Nach $\text{MA}_{\omega_1}$ sei $G \subseteq T$ $\mathcal{D}$-generischer Filter für $\mathcal{D} := \{D_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. $G$ ist (als Filter in $(T,>)$) Zweig (in $(T,<)$), und enthält Punkte beliebiger Höhe $< \omega_1$. Damit ist $G$ Zweig der Länge $\omega_1$ in $T$, ein Widerspruch (denn $T$ ist Aronszajn-Baum). ∎

---

⊛ Ein $\omega_1$-Baum heißt <u>gut</u>, falls für $\alpha < \beta < \omega_1$ und $x \in T(\alpha)$ stets ein $y \in T(\beta)$ gibt mit $x < y$.