geht wegen (*).

Nach Konstruktion sind die x_α verschieden. Nun ist
$$\lambda^+ = \{\alpha \mid c(u, x_\alpha) = 0\} \cup \{\alpha \mid c(u, x_\alpha) = 1\}$$
$$=: A_0 \cup A_1 .$$
OBdA sei $|A_0| = \lambda^+$.
$$H := \{x_\alpha \mid \alpha \in A_0\}$$
ist c-homogen mit Farbe 0: denn für $\alpha < \alpha' \in A_0$ ist $x_\alpha \in Z_{\alpha'}$, $c(u, x_\alpha) = 0$, $tp(x_{\alpha'}, Z_{\alpha'}) = tp(u, Z_{\alpha'})$, also $c(x_{\alpha'}, x_\alpha) = 0$. ∎

<u>18.13 Proposition</u> Jede schwach kompakte Kardinalzahl ist stark unerreichbar.

Beweis. Sei κ schwach kompakt, also $\kappa \to (\kappa)^2_2$. Wir haben die Behauptungen (1) – (3) zu zeigen.

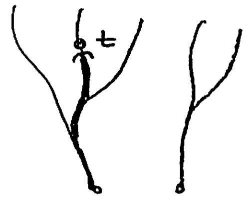
(1) $\kappa > \omega$: nach Definition von "schwach kompakt"

(2) $\lambda < \kappa \Rightarrow 2^\lambda < \kappa$: sonst wäre $\lambda^+ \leq \kappa \leq 2^\lambda$; nach 18.3 folgte $2^\lambda \to (\lambda^+)^2_2$, Widerspruch zu 18.11.

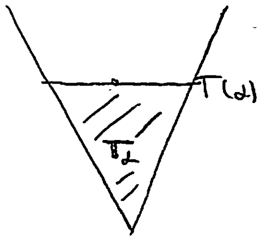
(3) κ regulär: sonst gibt es eine Partition $\kappa = \bigcup_{i \in I} X_i$ von κ mit $|I| < \kappa$, $|X_i| < \kappa$ für $i \in I$. Wir schreiben
$$[\kappa]^2 = P_0 \cup P_1$$
mit: $\{x, y\} \in P_0 :\Leftrightarrow$ es gibt $i \in I$ mit $x, y \in P_i$,
$$P_1 := [\kappa]^2 \setminus P_0 .$$
Wegen $\kappa \to (\kappa)^2_2$ wähle $H \subseteq \kappa$, $|H| = \kappa$, $[H]^2 \subseteq P_\varepsilon$.
Ist $\varepsilon = 0$, so $H \subseteq X_i$ für ein i; Widerspruch zu $|X_i| < \kappa$.
Für $\varepsilon = 1$ folgt: $|H \cap X_i| \leq 1$ für alle $i \in I$; Widerspruch zu $|I| < \kappa$. ∎

<u>19. Bäume</u>

<u>19.1 Definition</u> Ein Baum ist eine halbgeordnete Menge $(T, <)$, so daß für alle $t \in T$ die Menge $<t = \{x \in T \mid x < t\}$ durch $<$ wohlgeordnet wird.



$ht(t) :=$ der Ordnungstyp von $<t$
$= $ das $\alpha \in \mathrm{Ord}$ mit $(<t, <) \cong (\alpha, \in_\alpha)$
ist die Höhe von t (in T).



$T(\alpha) := \{t \in T \mid ht(t) = \alpha\}$
ist die α-te Schicht (Niveau, level) von T

$$T_\alpha := \bigcup_{\nu<\alpha} T(\nu)$$

$$ht(T) := \sup\{ht(t)+1 \mid t \in T\}$$
= die "Höhe" von T.

19.2 Beispiele (a) $X \neq \emptyset$ sei Menge, $\kappa \in Ord$

$$T := {}^{<\kappa}X = \{t \mid t : \alpha \to X \text{ für ein } \alpha < \kappa\} = \bigcup_{\alpha<\kappa} {}^{\alpha}X$$

wird Baum mit

$$t < s :\Leftrightarrow t \in {}^{\alpha}X,\ s \in {}^{\beta}X,\ \alpha < \beta \text{ und } t = s \restriction \alpha;$$

für $t \in {}^{\alpha}X$ ist $_{<}t = \{t \restriction \nu \mid \nu < \alpha\}$; es ist $T(\alpha) = {}^{\alpha}X$ und $T_\alpha = {}^{<\alpha}X$. Wir nennen T κ-verzweigt, wenn $|X| = \kappa$; binär wenn $|X| = 2$.

(b) Ist $(T,<)$ Baum und $S \subseteq T$, so ist $(S, < \restriction S)$ Baum, ein Teilbaum von T.

19.3 Definition (Zweige, Baumeigenschaft) (a) $(T,<)$ sei Baum. $C \subseteq T$ heißt Kette, falls $x \leq y$ oder $y \leq x$ für alle $x, y \in C$. C heißt Zweig, falls C Kette ist und aus $x \in T$, $y \in C$, $x \leq y$ stets $x \in C$ folgt. C heißt maximaler Zweig, falls C Zweig ist und kein Zweig D mit $C \subsetneq D$ existiert.

(b) $\kappa \in Card \setminus \omega$ hat die Baumeigenschaft, falls gilt: jeder Baum $(T,<)$ mit $|T| = \kappa$ hat eine Schicht $T(\alpha)$ oder einen (maximalen) Zweig der Mächtigkeit κ.

19.4 Satz (Königs Lemma) ω hat die Baumeigenschaft.

Beweis. Sei $(T,<)$ ein unendlicher Baum, in dem jedes Niveau $T(\alpha)$ endlich ist. Insbesondere ist $T(n) \neq \emptyset$ für jedes $n \in \omega$.
Wir konstruieren einen unendlichen Zweig $\{t_n \mid n \in \omega\}$ mit $t_n \in T(n)$.

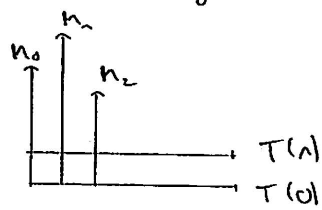
Vorbereitung: für $t \in T$, etwa $\in T(\alpha)$, heißt $s \in T$ ein (unmittelbarer) Nachfolger von t, falls $s \in T(\alpha+1)$ und $t < s$. – Es gilt:

⊛ Ist $t \in T$ und $t_< := \{x \in T \mid t < x\}$ unendlich, sind $s_1, \dots, s_n$ alle Nachfolger von t, so ist $s_{i<}$ unendlich für mindestens ein i – denn $t_< = \{s_1, \dots, s_n\} \cup s_{1<} \cup \dots \cup s_{n<}$.

Wähle $t_0 \in T(0)$ mit $t_{0<}$ unendlich (geht wegen $|T| \geq \omega$, $|T(0)| < \omega$); wähle dann induktiv $t_n \in T(n)$ mit $t_{n<}$ unendlich, t_{n+1} Nachfolger von t_n. ∎

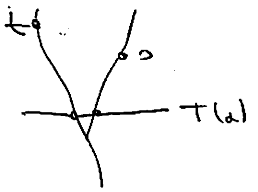
19.5 Bemerkung Hat κ die Baumeigenschaft, so ist κ regulär.

Beweis. Ist $\mathrm{cf}\,\kappa < \kappa$, so wähle man $\kappa_\alpha < \kappa$ mit $\kappa = \sum'_{\alpha < \mathrm{cf}\,\kappa} \kappa_\alpha$.
Sei $T := \bigcup_{\alpha < \mathrm{cf}\,\kappa} n_\alpha$, wobei $|n_\alpha| = \kappa_\alpha$, die n_α disjunkt; $<$ auf T sei so definiert, daß n_α Zweig mit Höhe κ_α ist:



Ist b Zweig in T, so $b \subseteq n_\alpha$ für ein α, also $|b| \leq \kappa_\alpha < \kappa$. Und jedes $T(\alpha)$ hat die Mächtigkeit $\leq \mathrm{cf}\,\kappa < \kappa$. Also hat κ nicht die Baumeigenschaft. ∎

19.6 Konstruktion ("die" kanonische lineare Erweiterung einer Baumordnung)
Sei $(T, \leq_T)$ ein Baum; für jedes $\alpha < ht(T)$ sei $<_\alpha$ eine lineare Ordnung auf $T(\alpha)$. Wir definieren eine lineare Ordnung $<_L$ auf T durch:



$t <_L s :\iff t <_T s$ oder für α minimal mit $t(\alpha) \neq s(\alpha)$ ist $t(\alpha) <_\alpha s(\alpha)$;

dabei ist $t(\alpha)$ das $x \in T(\alpha)$ mit $x < t$.

19.7 Satz Eine Kardinalzahl ist genau dann schwach kompakt, wenn sie stark unerreichbar ist und die Baumeigenschaft hat.

Beweis. $\Rightarrow$: κ sei schwach kompakt; nach 18.13 ist κ schwach unerreichbar. Sei $(T = \kappa, <_T)$ Baum und alle $|T(\alpha)| < \kappa$. $<_L$ sei kanonische lineare Erweiterung von $<_T$. Betrachte

$$c : [T]^2 \to 2$$
$$c(t,s) := \begin{cases} 0 & \text{falls } <_L, <_{ord} \text{ auf } \{t,s\} \text{ übereinstimmen,} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wegen $\kappa \to (\kappa)^2_2$ gibt es $H \subseteq \kappa$, $|H| = \kappa$, H c-homogen. Setze

$$b := \{t \in \kappa : \text{es gibt } \kappa \text{ verschiedene } h \in H \text{ mit } t \leq_T h\}.$$

Beh. 1 b schneidet jedes $T(\alpha)$, $\alpha < \kappa$ – also $|b| = \kappa$.
Zum Beweis schreibe (für gegebenes $\alpha < \kappa$)

$$H = H_0 \cup H_- \cup H_+$$
$$H_0 := H \cap T(\alpha)$$
$$H_+ := \{h \in H \mid ht(h) > \alpha\}$$
$$H_- := \{h \in H \mid ht(h) < \alpha\} = \bigcup_{\nu < \alpha} (H \cap T(\nu))$$

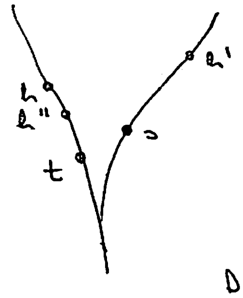
also $|H_0| < \kappa$, $|H_-| < \kappa$, $|H_+| = \kappa$. Für $h \in H_+$ existiert genau ein $t \in T(\alpha)$ mit $t \leq_T h$, also

$$H_+ = \bigcup_{t\in T(\alpha)} \{h\in H \mid t \le_T h\};$$

also existiert $t\in T(\alpha)$ mit $|\{h\in H \mid t \le_T h\}| = \kappa$. Dies t liegt in $b\cap T(\alpha)$.

Beh. 2 b ist Zweig (damit "$\Rightarrow$" bewiesen).

Sonst wähle $t, s \in b$; t, s unvergleichbar in $(T, <_T)$; oBdA



$t <_L s$. Wähle der Reihe nach $h, h', h'' \in H$:

$$t <_T h$$

$$s <_T h', \quad h <_{Ord} h'$$

$$t <_T h'', \quad h' <_{Ord} h''.$$

Da $h <_{Ord} h' <_{Ord} h''$ und H c-homogen, ist $h <_L h' <_L h''$ oder $h >_L h' >_L h''$. Da $t <_L s$, ist aber $h, h'' <_L h'$; Widerspruch.

$\Leftarrow$: Sei κ stark unerreichbar mit Baumeigenschaft; sei $c : [\kappa]^2 \to 2$. Wir definieren $T \subseteq {}^{<\kappa}2$; $(T, \subseteq)$ ist Baum,

$T := \{t_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$; alle t_α werden verschieden sein.

$t_0 := \emptyset$

Sei t_β, $\beta < \alpha$, definiert. Wir definieren $t_\alpha(\nu)$ ($\nu \in \xi < \kappa$ für ein ξ) durch Induktion über ν: sei $t_\alpha \restriction \nu$ definiert.

Gibt es kein $\beta < \alpha$ mit $t_\beta = t_\alpha \restriction \nu$, so setze $t_\alpha := t_\alpha \restriction \nu$.

Sonst gibt es genau ein $\beta < \alpha$ mit $t_\alpha \restriction \nu = t_\beta$; wir setzen

$$t_\alpha(\nu) := c(\alpha, \beta).$$

Damit ist T definiert. Für $\alpha < \kappa$ ist $T(\alpha) \subseteq {}^{\alpha}2$ (denn: $t_\alpha \in T$, $\nu < \mathrm{vb}\, t_\alpha \Rightarrow t_\alpha \restriction \nu \in T$), und $|T(\alpha)| \le 2^{|\alpha|} < \kappa$ (da κ stark unerreichbar). Sei nun $b \subseteq T$ Zweig mit $|b| = \kappa$, $s(\alpha)$ (für $\alpha < \kappa$) das Element von $b \cap T(\alpha)$. Betrachte

$$I := \{\alpha \in \kappa \mid t_\alpha \in b\}$$

$$= I_0 \cup I_1,$$

$$I_\varepsilon := \{\alpha \in I \mid t_\alpha{}^\frown \varepsilon \in b\}$$

(wobei $t^\frown \varepsilon := t \cup \{(\alpha, \varepsilon)\}$, fall $t \in T(\alpha)$). Es ist $|I| = \kappa$, oBdA also $|I_0| = \kappa$. Dann ist I_0 c-homogen mit Farbe 0: sei $\alpha \neq \beta$ in I_0, etwa $t_\beta <_T t(\alpha)$ (b ist Zweig!). $t_\beta, t_\beta{}^\frown 0, t_\alpha$ sind in $b \subseteq T$, also $t_\beta <_T t_\beta{}^\frown 0 \le_T t_\alpha$. Setze $\nu := \mathrm{vb}\, t_\beta$. Dann ist $t_\alpha \restriction \nu = t_\beta \in T$, $c(\alpha, \beta) = t_\alpha(\nu) = 0$ (da $t_\beta{}^\frown 0 \le_T t_\alpha$). ∎

19.8 Definition (Aronszajn-Baum) $(T, <_T)$ ist κ-Aronszajnbaum, falls $ht(T) = \kappa$, $|T(\alpha)| < \kappa$ für jedes $\alpha < \kappa$, und $|b| < \kappa$ für jeden Zweig $b \subseteq T$.

19.9 Satz (Aronszajn) Es gibt einen ω_1-Aronszajn-Baum – d.h. ω_1 hat nicht die Baumeigenschaft.

Beweis. Wir setzen $T := \bigcup_{\alpha<\omega_1} T(\alpha)$; die $T(\alpha)$ werden induktiv so konstruiert, daß:

(1) $x \in T(\alpha) \Rightarrow x: \alpha \to \mathbb{Q}$ ist streng monoton und beschränkt und $\sup x (:= \sup rng\, x) \in \mathbb{Q}$

(2) $0 < |T(\alpha)| \leq \omega$

(3) $\nu < \alpha < \omega_1, x \in T(\alpha) \Rightarrow x \upharpoonright \nu \in T(\nu)$

(4) $\nu < \alpha < \omega_1$, $y \in T(\nu)$, $q \in \mathbb{Q}$, $\sup y < q$
$\Rightarrow$ es gibt $x \in T(\alpha)$, $y \subseteq x$ (d.h. $y = x \upharpoonright \nu$), $\sup x = q$.

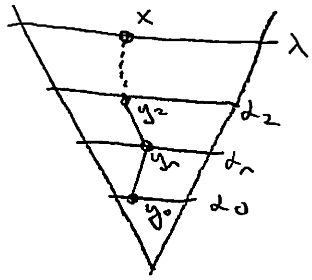
$(T, <) := (T, \subsetneq)$ ist dann Baum mit den (abzählbaren!) Niveaus $T(\alpha)$, also $ht(T) = \omega_1$. T ist Aronszajn-Baum, denn wäre $b \subseteq T$ Zweig mit $b \cap T(\alpha) \neq \emptyset$ für alle $\alpha < \omega_1$, so wäre $f := \bigcup b : \omega_1 \to \mathbb{Q}$ streng monoton; Widerspruch, da $|\mathbb{Q}| = \omega$.

Wir konstruieren die $T(\alpha)$: mit $T(0) := \{\emptyset\}$ sind (1)–(4) (für alle $\nu \leq \alpha \leq 0$) erfüllt.
Ist $(T(\nu))_{\nu \leq \alpha}$ konstruiert, so daß (1)–(4) (für $\nu \leq \alpha$) erfüllt sind, so setze einfach
$$T(\alpha+1) := \{x \cup (\alpha, r) \mid x \in T(\alpha), r \in \mathbb{Q}, \sup x < r\};$$
(1)–(4) sind für alle $\nu \leq \alpha+1$ erfüllt.
Sei $\lambda < \omega_1$ Limeszahl und $(T(\alpha))_{\alpha<\lambda}$ konstruiert, so daß (1)–(4) für $\nu \leq \alpha < \lambda$ gelten. $T_\lambda := \bigcup_{\alpha<\lambda} T(\alpha)$ ist abzählbarer Baum der Höhe λ, und wir zeigen später:

$$(*) \quad \begin{cases} y \in T_\lambda, q \in \mathbb{Q}, \sup y < q \Rightarrow \text{ex. } x: \lambda \to \mathbb{Q} \\ \text{streng monoton mit } y \subseteq x, \sup x = q, \\ x \upharpoonright \alpha \in T(\alpha) \text{ für alle } \alpha < \lambda. \end{cases}$$

Mit $(*)$ konstruiert man $T(\lambda)$ folgendermaßen: für $y \in T_\lambda$, $q \in \mathbb{Q}$ mit $\sup y < q$ wähle $x = x_{yq}: \lambda \to \mathbb{Q}$ nach $(*)$; setze
$$T(\lambda) := \{x_{yq} \mid y \in T_\lambda, q \in \mathbb{Q}, \sup y < q\}.$$

Es ist $|T(\lambda)| \le \omega$ wegen $|T_\lambda| = |\bigcup_{\alpha<\lambda} T(\alpha)| \le |\lambda| \cdot \omega = \omega$ und $|\mathbb{Q}| = \omega$. Die Wahl der $x_{yq} \in T(\lambda)$ sichert, daß (1) – (4) für alle $\alpha \le \lambda$ gilt, womit 19.9 bewiesen ist.



Beweis von ⊛: da $\lambda < \omega_1$ Limeszahl ist, gilt $\mathrm{cf}\,\lambda = \omega$; wir wählen Ordinalzahlen α_n, $n \in \omega$ mit

$$\alpha_0 = ht(y) < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \lambda, \quad \lambda = \sup_{n\in\omega} \alpha_n.$$

Wegen $\sup y < q$ gibt es $q_n \in \mathbb{Q}$ $(n \in \omega)$ mit

$$\sup y = q_0 < q_1 < \ldots < q, \quad \sup_n q_n = q.$$

Da (4) unterhalb von λ galt, wähle man induktiv $y_n \in T(\alpha_n)$:

$$y_0 := y$$

$$y_0 < y_1 \in T(\alpha_1), \ \sup y_1 = q_1 \quad (\text{wegen } \sup y_0 < q_1)$$
$$y_1 < y_2 \in T(\alpha_2), \ \sup y_2 = q_2 \quad (\text{wegen } \sup y_1 < q_2)$$

usw. $x := \bigcup_{n\in\omega} y_n$ leistet das Gewünschte: es ist $x : \lambda \to \mathbb{Q}$ streng monoton, $y = y_0 \le x$. Für $\alpha < \lambda$ wähle α_n mit $\alpha \le \alpha_n$ (das geht wegen $\lambda = \sup_n \alpha_n$); es ist

$$x \upharpoonright \alpha = (x \upharpoonright \alpha_n) \upharpoonright \alpha = y_n \upharpoonright \alpha \in T(\alpha).$$

Ferner $\sup x = \sup_n q_n = q$. ∎

<u>19.10 Definition</u> (Antikette, spezieller Aronszajn-Baum) Eine Teilmenge A eines Baums $(T, <)$ heißt Antikette, wenn für $x \ne y$ in A $x \not\le y$ und $y \not\le x$ gilt. Ein (Aronszajn) Baum heißt speziell, wenn er Vereinigung von abzählbar vielen Antiketten ist.
Der Baum T aus 19.9 ist speziell, da für $q \in \mathbb{Q}$

$$A_q := \{x \in T \mid \sup x = q\}$$

Antikette ist (aus $x <_T y$ folgt $\sup x < \sup y$, d.h. x, y nicht beide in A_q) und $T = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} A_q$ gilt.

Ist jeder Aronszajn-Baum speziell? Diese Frage läßt sich nicht in ZFC beantworten – siehe den Überblick in 19.12.

<u>19.11 Definition und Bemerkung</u> (Souslin-Bäume) Ein Baum der Höhe ω_1 heißt (ω_1-) Souslin-Baum, falls jede Kette (d.h. jeder Zweig) und jede Antikette von T abzählbar ist.

Da jedes Niveau eines Baums Antikette ist (die Umkehrung gilt nicht!), ist jeder Souslin-Baum T auch Aronszajn-Baum, der jedoch nicht speziell ist: wäre $T = \bigcup_{n \in \omega} A_n$, jedes A_n Antikette, so wäre ein A_n überabzählbar!

<u>19.12 Überblick</u> (SH) (die Souslinsche Hypothese) sei die Aussage: es gibt <u>keinen</u> Souslin-Baum

Es gibt Aussagen ($\Diamond$) (Karo, Diamond), (MA) (Martins Axiom) mit:

1. (in ZFC) $(\Diamond) \Rightarrow (CH)$ $(:\Leftrightarrow 2^\omega = \omega_1)$

   $(CH) \Rightarrow (MA)$

2. die Theorien $ZFC + (\Diamond)$, $ZFC + (CH) + \neg(\Diamond)$,

   $ZFC + (MA) + \neg(CH)$

   sind alle relativ konsistent zu ZFC

3. (in ZFC) $\Diamond \Rightarrow \neg(SH)$

   $MA + \neg(CH) \Rightarrow$ jeder Aronszajn-Baum ist speziell

   $\Rightarrow (SH)$.