17. Filter und Ultrafilter

Ultrafilter werden im Satz 18.5 zum Beweis von Partitionssätzen benutzt. Sie spielen in der mengentheoretischen Topologie und in der Modelltheorie eine Rolle.

17.1 Definition (Filter, Ultrafilter) X sei Menge, $F \subseteq P(X)$ heißt Filter (auf X), falls:

(a) aus $a \subseteq b \subseteq X$, $a \in F$ folgt $b \in F$

(b) aus $a, b \in F$ folgt $a \cap b \in F$

(c) $X \in F$.

Wegen (a), (b) gilt dann:

$$a \cap b \in F \Leftrightarrow a \in F \text{ und } b \in F.$$

F heißt echter Filter, falls $\emptyset \notin F$ (d.h. falls $F \neq P(X)$), sonst unecht.
F heißt Ultrafilter, falls F echt und für alle $a \subseteq X$: $a \in F$ oder $X \setminus a \in F$ (also: $a \in F \Leftrightarrow X \setminus a \notin F$).

17.2 Bemerkung Für beliebige Filter gilt:

$$a \in F \text{ oder } b \in F \Rightarrow a \cup b \in F,$$

falls F echt: $\quad a \in F \Rightarrow X \setminus a \notin F.$

17.3 Beispiele (a) (Hauptfilter) Sei $a^* \subseteq X$ fest gewählt.

$$F := \{a \subseteq X \mid a^* \subseteq a\}$$

ist der von a^* erzeugte Hauptfilter. Er ist echt genau dann, wenn $a^* \neq \emptyset$, Ultrafilter genau dann, wenn $a^* = \{x\}$ für ein $x \in X$.
Ein Filter heißt frei, wenn er nicht Hauptfilter ist.

(b) Sei $X = \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$,

$$F := \{a \subseteq \mathbb{R} \mid \text{ex. } \varepsilon > 0 \text{ mit } (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq a\}$$

ist echter Filter, der Umgebungsfilter von x. Er ist kein Ultrafilter und frei.

(c) (Fréchet-Filter) Ist X unendlich, so ist

$$F := \{a \subseteq X \mid |X \setminus a| < \omega\}$$

der Fréchet-Filter auf X. Er ist echt, kein Hauptfilter und kein Ultrafilter.

17.4 Proposition (der von E erzeugte Filter) Sei $E \subseteq P(X)$. Dann ist

$$F := \{a \subseteq X \mid \text{ex. } n \in \omega \text{ und } e_1, \dots, e_n \in E \text{ mit } e_1 \cap \dots \cap e_n \subseteq a\}$$

der kleinste Filter G auf X mit $E \subseteq G$, der von E erzeugte

Filter. F ist echt genau dann, wenn E die endliche Durchschnittseigenschaft hat, d.h. wenn $e_1 \cap \dots \cap e_n \neq \emptyset$ für $n \in \omega$ und $e_1, \dots, e_n \in E$.

∎

17.5 Satz (Charakterisierung von Ultrafiltern) Für jeden Filter F sind äquivalent:

(a) F ist Ultrafilter

(b) F ist Primfilter, d.h. F ist echt und aus $a \cup b \in F$ folgt $a \in F$ oder $b \in F$

(also mit 17.2: $a \cup b \in F \Leftrightarrow a \in F$ oder $b \in F$)

(c) F ist maximaler echter Filter.

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b): für $a, b \subseteq X$ gilt

$$\begin{aligned} a \cup b \in F &\Rightarrow X \setminus (a \cup b) \notin F \quad && (F \text{ echt}) \\ &\Rightarrow (X \setminus a) \cap (X \setminus b) \notin F && \\ &\Rightarrow X \setminus a \notin F \text{ oder } X \setminus b \notin F && (17.1) \\ &\Rightarrow a \in F \text{ oder } b \in F && (F \text{ Ultrafilter}). \end{aligned}$$

(b) $\Rightarrow$ (c): Sei $a \notin F$; sei G Filter mit $F \cup \{a\} \subseteq G$; wir zeigen $\emptyset \in G$. Aber: $X = a \cup (X \setminus a) \in F$, $X \setminus a \in F$ (da F prim), $a, X \setminus a \in G$, $\emptyset \in G$.

(c) $\Rightarrow$ (a): sei $a \notin F$; wir zeigen $X \setminus a \in F$. Da F maximal und $a \notin F$, ist der von $F \cup \{a\}$ erzeugte Filter unecht. Nach 17.4 existiert $f \in F$ mit $a \cap f = \emptyset$. Also $f \subseteq X \setminus a$ und $X \setminus a \in F$.

∎

17.6 Satz (Ultrafiltersatz) Jeder echte Filter läßt sich zu einem Ultrafilter erweitern.

Beweis. Sei F echter Filter auf X. Setze

$$P := \{ D \subseteq P(X) \mid D \text{ echter Filter und } F \subseteq D \};$$

für $D, D' \in P$ sei $D \leq D' :\Leftrightarrow D \subseteq D'$. Nach dem Zornschen Lemma hat P ein maximales Element D; nach 17.5 ist D Ultrafilter. ∎

17.7 Korollar Auf jeder unendlichen Menge gibt es einen freien Ultrafilter.

Beweis. F sei (nach 17.3 (c)) der Fréchet-Filter auf X; nach 17.6 sei $D \supseteq F$ ein Ultrafilter. Wäre D Hauptfilter, etwa von $a^* \subseteq X$ erzeugt, so wäre $a^* = \{x\}$ für ein $x \in X$ (siehe 17.3(a)). Aber $X \setminus \{x\} \in F \subseteq D$ und $a^* \in D$; D wäre nicht echt.

∎

17.8 Definition (κ-vollständige Filter) Ein Filter F heißt κ-vollständig (wobei $\kappa \in Card$, $\kappa \geq \omega$), falls für $A \subseteq F$ mit $|A| < \kappa$ stets $\bigcap A \in F$ ist.

Jeder Filter ist also ω-vollständig.

Ist F freier κ-vollständiger Ultrafilter und $a \in F$, so $|a| \geq \kappa$: denn für $x \in X$ ist $\{x\} \notin F$ (sonst wäre F der von $\{x\}$ erzeugte Hauptfilter), also $X \setminus \{x\} \in F$. Für $a \subseteq X$ mit $|a| < \kappa$ ist

$$X \setminus a = \bigcap_{x \in a} X \setminus \{x\} \quad \in F,$$

also $a \notin F$.

17.9 Definition (meßbare Kardinalzahl) Eine Kardinalzahl κ heißt meßbar, falls $\kappa > \omega$ und es einen freien κ-vollständigen Ultrafilter auf κ gibt.

Die Bezeichnung "meßbar" stammt von folgender Analogie. Ist D Ultrafilter auf X, so wird

$$\mu_D : P(X) \to 2 = \{0, 1\} \subseteq [0, 1]$$
$$\mu_D(a) := \begin{cases} 1 & \text{falls } a \in D \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ein endlich additives Maß; umgekehrt liefert jedes solche Maß einen Ultrafilter. D ist κ-vollständig genau dann, wenn μ_D κ-additiv ist.

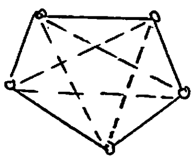
17.10 Bemerkung Meßbare Kardinalzahlen sind "sehr groß"; z.B. zeigen wir in Kapitel 18:

κ meßbar $\Rightarrow$ κ schwach kompakt $\Rightarrow$ κ stark unerreichbar;

die Existenz unerreichbarer Kardinalzahlen ist in ZFC nicht beweisbar.

18. Partitionsresultate

18.1 Ein Beispiel Wir haben fünf Punkte und färben ihre Verbindungsgeraden mit zwei Farben, schwarz und weiß.



——— schwarz

- - - - - - weiß

Gibt es drei Punkte, so daß alle drei Verbindungsgeraden dieselbe Farbe haben? Offenbar nicht.

Haben wir aber sechs Punkte und färben die Verbindungen beliebig schwarz oder weiß, so gibt es ein "einfarbiges Dreieck":