# Lösungen der Probeklausur

## Aufgabe 2

Zu jedem Punkt $x \in X$ gibt es nach Voraussetzung ein $r_x > 0$, so dass $\sup\{f(y) : y \in B_{r_x}(x)\} < 1$. $(B_{r_x}(x))_{x \in X}$ ist dann eine offene Überdeckung von $X$, d. h.

$$X \subset \bigcup_{x \in X} B_{r_x}(x).$$

Da $X$ kompakt ist, gibt es $x_1, \dots, x_n \in X$, so dass

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{r_{x_i}}(x_i).$$

Sei $s_i := \sup\{f(y) : y \in B_{r_{x_i}}(x_i)\}$, $i = 1, \dots, n$. Nach Voraussetzung ist $s_i < 1$ für alle $i = 1, \dots, n$. Dann ist auch

$$s := \max\{s_1, \dots s_n\} < 1.$$

Sei nun $x \in X$. Dann ist $x \in B_{r_{x_i}}(x_i)$ für ein $i \in \{1, \dots, n\}$ und es gilt

$$f(x) \le s_i \le s < 1.$$

Da $x \in X$ beliebig war, gilt auch

$$\sup\{f(x) : x \in X\} \le s < 1$$

und die Aussage ist bewiesen.

## Aufgabe 4

$f$ und $g$ sind auf ihrem gesamten Definitionsbereich differenzierbar, da jede ihrer Komponenten stetig partiell differenzierbar ist. Für die Ableitungen gilt:

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 1 \\ 1 & -2y \end{pmatrix}$$

und

$$Dg(u,v,w) = (2u, 2v, 2w).$$

Nach der Kettenregel ist

$$\begin{aligned} D(g \circ f)(x,y) &= Dg(f(x,y))Df(x,y) \\ &= (2xy, 2(x^2+y), 2(x-y^2)) \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 1 \\ 1 & -2y \end{pmatrix} \\ &= (2xy^2 + 4x(x^2+y) + 2(x-y^2), 2x^2y + 2(x^2+y) - 4y(x-y^2)) \\ &= (2xy^2 + 4x^3 + 4xy + 2x - 2y^2, 2x^2y + 2x^2 + 2y - 4xy + 4y^3). \end{aligned}$$

**Aufgabe 5**

Notwendige Bedingung für ein lokales Extremum:

$$\mathrm{grad} f(x, y) = (-6x + 7y, 7x - 4y) = (0, 0).$$

Dies ist nur für $x = y = 0$ erfüllt. Um zu prüfen, ob bei $(0, 0)$ eine Extremum von $f$ vorliegt, muss die Hesse-Matrix von $f$ im Punkt $(0, 0)$ auf positive oder negative Definitheit untersucht werden. Es ist

$$\mathrm{Hess} f(0, 0) = \begin{pmatrix} -6 & 7 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}.$$

Da $\det(\mathrm{Hess} f(0, 0)) = 24 - 49 < 0$ und $\det(\text{-}\mathrm{Hess} f(0, 0)) = 24 - 49 < 0$ ist $\mathrm{Hess} f(0, 0)$ weder positiv noch negativ definit. $\mathrm{Hess} f(0, 0)$ ist indefinit, denn:

$$\begin{aligned} < \binom{1}{0}, \begin{pmatrix} -6 & 7 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} \binom{1}{0} > &= < \binom{1}{0}, \binom{-6}{7} > \\ &= -6 < 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} < \binom{1}{1}, \begin{pmatrix} -6 & 7 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} \binom{1}{1} > &= < \binom{1}{1}, \binom{1}{3} > \\ &= 4 > 0. \end{aligned}$$

Bei $(0, 0)$ hat $f$ also kein lokales Extremum, $f$ hat somit keine lokalen Extrema.

**Aufgabe 6**

Betrachte für (a) die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y - \sin z \\ e^x - x - y^3 - 1 \end{pmatrix}$$

Es ist $f(0, 0, 0) = \binom{0}{0}$. Es muss

$$\frac{\partial f}{\partial(y, z)}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & -\cos z \\ -3y^2 & 0 \end{pmatrix}$$

an der Stelle $(0, 0, 0)$ untersucht werden:

$$\frac{\partial f}{\partial(y, z)}(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist nicht invertierbar, somit kann Gleichungssystem (a) nicht in einer Umgebung von $(0, 0, 0)$ nach $y, z$ aufgelöst werden.

Betrachte für (b) die Abbildung $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$g(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y - \sin z \\ e^z - x - y^3 - 1 \end{pmatrix}$$

Es ist $g(0,0,0) = \binom{0}{0}$. Es muss

$$\frac{\partial g}{\partial(y,z)}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & -\cos z \\ -3y^2 & e^z \end{pmatrix}$$

an der Stelle $(0,0,0)$ untersucht werden:

$$\frac{\partial g}{\partial(y,z)}(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist invertierbar, somit kann nach dem Satz über implizite Funktionen Gleichungssystem (b) in einer Umgebung von $(0,0,0)$ nach $y, z$ aufgelöst werden.