Freie Universität Berlin **WS 2006/2007**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Konrad Polthier, Anja Krech

9. Übung zur Vorlesung „Analysis II“

Ausgabe: 19.12.06 Abgabe: 9.1.07

Dies ist ein zusätzlicher, freiwilliger Übungszettel, den Sie über die Weihnachtsferien bearbeiten können. Er wiederholt noch einmal Themen, die bisher in der Vorlesung behandelt wurden (ohne Anspruch auf Vollständigkeit), Sie können ihn also gut zur Wiederholung der Begriffe und eventuell schon Vorbereitung auf die Klausur nutzen. Zusätzlich bieten wir eine Probeklausur am 16. Januar in der großen Übung an.
Aus den folgenden sechs Aufgaben wählen Sie bitte vier Aufgaben aus, die Sie bearbeiten möchten. Sie können insgesamt maximal 16 (4 mal 4) Punkte erreichen.

Aufgabe 1 (Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen)

Gegeben sei die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = nx(1-x)^n.$$

Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise, aber nicht gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe 2 (Differenzierbarkeit)

Gegeben seien die Abbildungen $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto x^2+y^2+z^2$ und $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(s,t) \mapsto (s,t,st)$.
Zeigen Sie, dass f und g auf ihrem gesamten Definitionsbereich differenzierbar sind und berechnen Sie die Jacobi-Matrix von $f \circ g$ an der Stelle (s,t) mit Hilfe der Kettenregel.

Aufgabe 3 (Topologie metrischer Räume)

Es seien $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie:

(a) A und B offen $\Longrightarrow A \times B \subset \mathbb{R}^{n+m}$ offen;

(b) A und B abgeschlossen $\Longrightarrow A \times B$ abgeschlossen;

(c) $\partial(A \times B) = (\partial A \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times \partial B)$.

(In Teil (c) sei $\overline{A} = A \cup \partial A$ bzw. $\overline{B} = B \cup \partial B$.)

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (Kompaktheit)

Sei K ein kompakter metrischer Raum. Ferner sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von K. Zeigen Sie, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass für jede Menge $A \subset K$ mit $\sup\limits_{x,y\in A} d(x,y) < \delta$ ein $i_0 \in I$ existiert mit $A \subset U_{i_0}$.

Anleitung:
Zeigen Sie zunächst, dass es zu jedem $x \in K$ ein $\delta(x) > 0$ gibt, so dass zu $U_{\delta(x)}(x) := \{y \in K : d(x,y) < \delta(x)\}$ ein $i_0 \in I$ existiert mit $U_{\delta(x)}(x) \subset U_{i_0}$.
Betrachten Sie dann die offene Überdeckung

$$\left(U_{\frac{\delta(x)}{2}}(x)\right)_{x\in K}$$

von K.
Aufgrund der Kompaktheit von K gibt es eine offene Teilüberdeckung

$$\left(U_{\frac{\delta(x_k)}{2}}(x_k)\right)_{k=1,\ldots,n}.$$

Zeigen Sie, dass $\delta := \min\{\frac{\delta(x_k)}{2} : k = 1,\ldots,n\}$ gewählt werden kann.

Aufgabe 5 (Lokale Extrema)

(a) Unter allen Dreiecken mit festem Umfang $2s$ finde man das flächengrößte.

(b) Unter allen n-Ecken, welche dem Einheitskreis eingeschrieben werden können, finde man das flächengrößte.

Aufgabe 6 (Implizite Funktionen)

Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 + uy + e^v &= 0 \\ 2x + u^2 - uv &= 5 \end{aligned}$$

in einer Umgebung von $(2,5)$ durch eine C^1-Abbildung

$$(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$$

mit $u(2,5) = -1$ und $v(2,5) = 0$ aufgelöst werden kann, und berechnen Sie die Ableitung dieser Abbildung im Punkt $(2,5)$.