Freie Universität Berlin **WS 2006/2007**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Konrad Polthier, Anja Krech

7. Übung zur Vorlesung „Analysis II“

Ausgabe: 5.12.06 Abgabe: 12.12.06

Aufgabe 1

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2).$$

Zeigen Sie, dass

(a) die Funktion $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(t) := f(at, bt)$ für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$, $(a, b) \neq (0, 0)$, in 0 ein isoliertes lokales Minimum hat, aber

(b) f in $(0, 0)$ kein lokales Minimum hat. Wo ist $f > 0$, wo $f < 0$?

Aufgabe 2

Zeigen Sie direkt anhand der Definition, dass die Menge

$$K = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$$

kompakt ist.

Aufgabe 3

Es sei K ein kompakter metrischer Raum. Gegeben sei eine abgeschlossene Teilmenge $A \subset K$ und ein Punkt $x \in K \setminus A$. Zeigen Sie, dass es offene Teilmengen $O_1 \subset K$ und $O_2 \subset K$ gibt, so dass $O_1 \cap O_2 = \emptyset$, $x_1 \in O_1$ und $A \subset O_2$.

Aufgabe 4

Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Abbildung $f : X \longrightarrow X$ heißt *Kontraktion* falls ein $C \in [0, 1[$ existiert, so dass $d(f(x), f(y)) \leq C d(x, y)$ für alle $x, y \in X$. Zeigen Sie:

(a) Ist X kompakt, dann hat f einen eindeutigen Fixpunkt, d. h. es existiert genau ein $x \in X$ mit $f(x) = x$.

(b) Ist $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$, $f(x) = x - \frac{x^2}{2}$, eine Kontraktion? Was sind die Fixpunkte von f?