**Freie Universität Berlin** **WS 2006/2007**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Konrad Polthier, Anja Krech

# 4. Übung zur Vorlesung „Analysis II“

Ausgabe: 14.11.06 Abgabe: 21.11.06

---

**Aufgabe 1**

Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(0,0) = 0$ und

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \qquad \text{für } (x,y) \neq (0,0)$$

in $(0,0)$ unstetig ist, dort aber alle Richtungsableitungen existieren.

**Aufgabe 2**

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(0,0) = 0$ und

$$f(x,y) = \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} \qquad \text{für } (x,y) \neq (0,0).$$

Zeigen Sie:

(a) $D_{xy}f$ und $D_{yx}f$ existieren auf $\mathbb{R}^2$ und sind stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(b) $D_{xy}f(0,0) = 1$ und $D_{yx}f(0,0) = -1$.

**Aufgabe 3**

Die Funktion $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei partiell differenzierbar und $D_1 f, \ldots, D_n f$ seien auf $U$ beschränkt. Zeigen Sie, dass dann $f$ stetig ist.

**Aufgabe 4**

Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $v : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ein zweimal stetig partiell differenzierbares Vektorfeld. Zeigen Sie, dass

$$\text{div rot } v = 0.$$