

### 3. Übung zur Vorlesung „Analysis II“

Ausgabe: 7.11.06

Abgabe: 14.11.06

---

#### Aufgabe 1

Gegeben sei die Abbildung  $d_0 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ , mit

$$d_0(x, x) = 0 \quad \text{und} \quad d_0(x, y) = \|x\| + \|y\| \quad \text{für} \quad x \neq y,$$

wobei  $\|\cdot\|$  eine beliebige Norm auf  $\mathbb{R}^n$  sei.

Zeigen Sie:

- (a)  $d_0$  ist eine Metrik auf  $\mathbb{R}^n$
- (b) In Bezug auf diese Metrik gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \neq 0$  genau dann, wenn  $x_n = a$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  genau dann, wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0$  ist.

#### Aufgabe 2

Gegeben sei  $Y = [-1, 1]$  als Unterraum von  $\mathbb{R}$ . Welche der folgenden Mengen sind offen in  $Y$ ? Welche sind offen in  $\mathbb{R}$ ?

- (a)  $A = \{x : \frac{1}{2} < |x| < 1\}$
- (b)  $B = \{x : \frac{1}{2} < |x| \leq 1\}$
- (c)  $C = \{x : \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1\}$
- (d)  $D = \{x : 0 < |x| < 1 \text{ und } \frac{1}{x} \notin \mathbb{N}\}$

#### Aufgabe 3

Bestimmen Sie Rand und Inneres der folgenden Mengen im  $\mathbb{R}^2$ :

- (a)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$
- (b)  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \neq 0\}$
- (c)  $C = A \cup B$
- (d)  $D = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Q}\}$
- (e)  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y \leq \frac{1}{x}\}$

Bitte wenden!

#### Aufgabe 4

Sei  $f : X \longrightarrow Y$  eine stetige Funktion zwischen den metrischen Räumen  $X$  und  $Y$  und  $E$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $Y$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $f^{-1}(E)$  abgeschlossen in  $X$  ist.
- (b) Zeigen Sie, dass im Fall  $Y = \mathbb{R}$  die Nullstellenmenge von  $f$ , d. h.  $N = \{x \in X : f(x) = 0\}$  abgeschlossen ist.