Freie Universität Berlin **WS 2006/2007**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Konrad Polthier, Anja Krech

11. Übung zur Vorlesung „Analysis II“

Ausgabe: 23.1.07 Abgabe: 30.1.07

Aufgabe 1

Skizzieren Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung

$$y' = \frac{x}{y} \qquad \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$$

und geben Sie die Lösung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die der Anfangsbedingung $\varphi(0) = c, c > 0$, genügt.

Aufgabe 2

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = x^2 + xy^2, \qquad y(0) = 0.$$

(a) Berechnen Sie mit Hilfe des Picard-Lindelöfschen Iterationsverfahrens ausgehend von $y_0(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ die sukzessiven Approximationen y_n für $n = 1, 2, 3$. (4 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Aufgabe 2 auf $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ gleichmäßig gegen die auf $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ existierende Lösung y des Anfangswertproblems konvergiert. (4 Punkte)

Aufgabe 3

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die in $I \times \mathbb{R}^n$ global einer Lipschitzbedingung mit der Konstanten $L \in \mathbb{R}_+$ genügt.
Weiter seien $\varphi, \psi : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ zwei Lösungen der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$.
Sei $a \in I$ und $\delta := ||\varphi(a) - \psi(a)||$. Zeigen Sie:

$$||\varphi(x) - \psi(x)|| \leq \delta e^{L|x-a|} \qquad \text{für alle } x \in I.$$