

## 9. Übung zur Vorlesung „Analysis III“

Ausgabe: 12.06.07

Abgabe: 19.06.07

---

### **Aufgabe 1** (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass jede Gerade  $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = ax + b\}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , eine Nullmenge in  $\mathbb{R}^2$  ist!

### **Aufgabe 2** (2+2 Punkte)

Es sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{falls } (x, y) \in [0, 1]^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass die iterierten Integrale

$$\int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right) dy \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right) dx$$

nicht übereinstimmen!

(b) Welche Voraussetzung an  $f$  für eine bedenkenlose Vertauschung der Integrationsreihenfolge in (a) ist nicht erfüllt?

### **Aufgabe 3** (4 Punkte)

Es sei  $a > 0$  fest. Zeigen Sie, dass die Menge  $M = \{f_n : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$  der Funktionen  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$  mit

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{a^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-ax}, & \text{falls } x \geq 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

abgeschlossen bezüglich der Faltungsoperation  $*$  ist, d. h., dass für Funktionen  $f_n$  und  $f_m$  aus  $M$  auch  $f_n * f_m \in M$  gilt!