Freie Universität Berlin **SoSe 2007**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Konrad Polthier, Dr. Felix Ballani

Zum 7. Übungsblatt der Vorlesung „Analysis III“

Zusatzaufgabe (2 Punkte)

Beweisen Sie für $a > 0$ die Abschätzung

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi\,(1-\mathrm{e}^{-a^2})} \le \int_0^a \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{2}\sqrt{\pi\,(1-\mathrm{e}^{-2a^2})} \quad !$$

Lösung:

Mit

$$K_a := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le a^2, x,y \ge 0\}$$

gilt wegen $\mathrm{e}^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und

$$K_a \subset [0,a]^2 \subset K_{\sqrt{2}a}$$

auch

$$\int\limits_{K_a} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}(x,y) \le \int\limits_{[0,a]^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}(x,y) \le \int\limits_{K_{\sqrt{2}a}} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}(x,y). \tag{1}$$

Für das Integral auf der linken Seite in (1) gilt nach Einführung von ebenen Polarkoordinaten

$$\int\limits_{K_a} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}(x,y) = \int\limits_0^a \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-r^2} r\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r^2}\right]_0^a = \frac{\pi}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-a^2}\right),$$

und entsprechend erhält man für das Integral auf der rechten Seite in (1)

$$\int\limits_{K_{\sqrt{2}a}} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}(x,y) = \int\limits_0^{\sqrt{2}a} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-r^2} r\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r^2}\right]_0^{\sqrt{2}a} = \frac{\pi}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-2a^2}\right).$$

Das mittlere Integral in (1) lässt sich schreiben als

$$\int\limits_{[0,a]^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}(x,y) = \left(\int\limits_0^a \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int\limits_0^a \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y\right) = \left(\int\limits_0^a \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2.$$

Damit ist (1) äquivalent zu

$$\frac{\pi}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-a^2}\right) \le \left(\int\limits_0^a \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2 \le \frac{\pi}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-2a^2}\right),$$

und nach dem Ziehen der Quadratwurzel folgt die Behauptung.