Freie Universität Berlin **SoSe 2007**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Konrad Polthier, Dr. Felix Ballani

7. Übung zur Vorlesung „Analysis III“

Ausgabe: 29.05.07 Abgabe: 05.06.07

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f : U \to [0, \infty[$ eine stetige Funktion und $\widetilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die triviale Fortsetzung von f, d. h. $\widetilde{f}(x) = f(x)$ für $x \in U$ und $\widetilde{f}(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus U$. Zeigen Sie $\widetilde{f} \in \mathcal{H}^{\uparrow}(\mathbb{R}^n)$!

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Berechnen Sie das Volumen des Körpers in $\mathbb{R}^3$, der von dem hyperbolischen Paraboloid $z = x\,y$, dem Dreieck mit den Ecken $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und der Ebene $x + y = 1$ begrenzt wird!

Aufgabe 3 (2+3+2 Punkte)

(a) Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ eine stetige Funktion und

$$K := \{(x,y,z) \in [a,b] \times \mathbb{R}^2 : y^2 + z^2 \leq [f(x)]^2\}.$$

Zeigen Sie (z. B. mit dem Cavalierischen Prinzip) $\mathrm{Vol}_3(K) = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \,\mathrm{d}x$!

(b) Sei $B \subset \mathbb{R} \times [0, \infty[$ kompakt. Der Körper $K \subset \mathbb{R}^3$ sei die Menge aller der Punkte $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, die bei der vollständigen Drehung des Bereichs $B \times \{0\}$ um die x-Achse überstrichen werden.
Zeigen Sie, dass das Volumen $\mathrm{Vol}_3(K)$ von K gleich dem Produkt aus dem Flächeninhalt $\mathrm{Vol}_2(B)$ des erzeugenden Bereichs B und der Länge des Weges, den der Schwerpunkt $(x_B, y_B, 0)$ von $B \times \{0\}$ bei der Drehung zurücklegt! Dabei gilt

$$x_B = \frac{1}{\mathrm{Vol}_2(B)} \int_B x \,\mathrm{d}(x,y) \quad \text{und} \quad y_B = \frac{1}{\mathrm{Vol}_2(B)} \int_B y \,\mathrm{d}(x,y).$$

(c) Sei $0 < r < R < \infty$ und $K \subset \mathbb{R}^3$ der Körper, der durch Drehung der Kreisscheibe

$$B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (y-R)^2 \leq r^2, z = 0\}$$

um die x-Achse entsteht. Berechnen Sie (z. B. mit (b)) das Volumen von K !

Zusatzaufgabe (2 Punkte)

Beweisen Sie für $a > 0$ die Abschätzung

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi\,(1 - \mathrm{e}^{-a^2})} \leq \int_0^a \mathrm{e}^{-x^2} \,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2}\sqrt{\pi\,(1 - \mathrm{e}^{-2a^2})} \quad !$$

Bitte die Lösungen der Aufgaben bis zum Dienstag, dem 05.06.07, 17.30 Uhr, in das Fach (7B) von Felix Ballani in der Arnimallee 3, 1. Stock, legen.