

## 6. Übung zur Vorlesung „Analysis III“

Ausgabe: 22.05.07

Abgabe: 29.05.07

---

### **Aufgabe 1** (2+2+4 Punkte)

Vorgegeben sei folgende Koordinatentransformation:

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin u \cosh v \\ \cos u \sinh v \end{pmatrix}$$

$((x, y)$  sind die kartesischen Koordinaten,  $(u, v)$  bezeichnet man auch als ebene elliptische Koordinaten.)

- Geben Sie einen möglichst großen Bereich in der  $(u, v)$ -Ebene an, für den die Transformation  $\Phi$  injektiv ist!
- Beschreiben Sie das Verhalten der Transformation bei festem  $u$  bzw. festem  $v$  mit Hilfe von Skizzen! Welche bekannten Kurven durchlaufen  $v$  bzw.  $u$ ?
- Bestimmen Sie den Laplace-Operator in  $(u, v)$ -Koordinaten!

### **Aufgabe 2** (2+3 Punkte)

Prüfen Sie, welche der folgenden Funktionen Elemente von  $\mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$  bzw.  $\mathcal{H}^\downarrow(\mathbb{R}^n)$  sind, und berechnen Sie gegebenenfalls das Integral über  $\mathbb{R}^n$ !

(a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \chi_{\mathbb{N}}(x)$

(b)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} (x+y)e^{x+y} & (x, y) \in ]0, 2[ \times ]1, 2[ \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

(Dabei bezeichnet  $\chi_A$  die charakteristische Funktion einer Menge  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , d. h.  $\chi_A(x) = 1$ , falls  $x \in A$ , sonst  $\chi_A(x) = 0$ .)