Freie Universität Berlin **SoSe 2007**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Konrad Polthier, Dr. Felix Ballani

4. Übung zur Vorlesung „Analysis III“

Ausgabe: 08.05.07 Abgabe: 15.05.07

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Es sei $\alpha > 0$. Konstruieren Sie mit Hilfe der Funktion

$$g(t) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-t^2}\right) & \text{falls } |t| < 1 \\ 0 & \text{falls } |t| \geq 1 \end{cases}$$

eine Funktion $f_\alpha \in \mathcal{C}_c^\infty$, welche auf $\{x \in \mathbb{R} : |x| \leq \frac{\alpha}{2}\}$ identisch 1 und auf $\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq \alpha\}$ identisch 0 ist und ansonsten nur Werte aus dem Intervall $[0, 1]$ annimmt!
(Betrachten Sie (zum Beispiel) für $\alpha = 1$ die Funktion $h(x) = \mathrm{e}\, g\big(\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}\, g(x)\big)$! Aus h lässt sich f_1 konstruieren. Für den allgemeinen Fall muss dann noch der Parameter α eingebaut werden.)

Aufgabe 2 (2+2+3 Punkte)

Seien L_1, L_2, L_3, M lineare Differentialoperatoren in der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass der Kommutator $[L_1, L_2] := L_1 \circ L_2 - L_2 \circ L_1$ folgende Eigenschaften erfüllt!

(a) $[M, L_1 \circ L_2] = [M, L_1] \circ L_2 + L_1 \circ [M, L_2]$

(b) $[[L_1, L_2], L_3] + [[L_2, L_3], L_1] + [[L_3, L_1], L_2] = 0$

(c) Hat L_1 die Ordnung k und L_2 die Ordnung l, so ist $[L_1, L_2]$ ein Differentialoperator der Ordnung $\leq k + l - 1$.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Es sei $U =]a, b[$ für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Weiterhin sei $p \in \mathcal{C}_c(U)$ mit $p \geq 0$, und es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, die beide entweder monoton wachsend oder monoton fallend sind. Zeigen Sie mit Hilfe der Nichtnegativität von p und der Monotonie von f und g die folgende Ungleichung!

$$\left(\int_U p(x) f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_U p(x) g(x)\,\mathrm{d}x\right) \leq \left(\int_U p(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_U p(x) f(x) g(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

(Tipp: Beide Seiten der Ungleichung lassen sich als zweidimensionale Integrale schreiben, z. B. die linke Seite als $\int_{U\times U} p(x)p(y)f(x)g(y)\,\mathrm{d}(x, y)$. Betrachten Sie deren Differenz!)

Bitte die Lösungen der Aufgaben bis zum Dienstag, dem 15.05.07, 17.30 Uhr, in das Fach (7B) von Felix Ballani in der Arnimallee 3, 1. Stock, legen.