Freie Universität Berlin **SoSe 2007**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Konrad Polthier, Dr. Felix Ballani

3. Übung zur Vorlesung „Analysis III“

Ausgabe: 30.04.07 Abgabe: 08.05.07

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Es seien $\alpha \in [0, 2\pi[$ und $p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Bestimmen Sie für die Drehstreckung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto \varphi(x) := SRx$ mit $R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ und $S = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$ die Determinante der Funktionalmatrix!

Aufgabe 2 (1+4 Punkte)

Es seien $a, b \in \mathbb{R}_+$. Die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \left(1 - \frac{|x|}{a} - \frac{\sqrt{y^2+z^2}}{b}\right)(y^2+z^2) & \text{falls } \frac{|x|}{a} + \frac{\sqrt{y^2+z^2}}{b} \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie den Träger von f in $\mathbb{R}^3$!

(b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) \ !$$

(Hinweis: Man führe in geeigneter Weise Zylinderkoordinaten ein!)

Aufgabe 3 (3+3 Punkte)

Ein System $\mathcal{A}$ von Teilmengen einer Menge Ω heißt eine σ-*Algebra* (in Ω), wenn es folgende Eigenschaften besitzt:

(1) $\Omega \in \mathcal{A}$

(2) $B \in \mathcal{A} \Rightarrow (\Omega \setminus B) \in \mathcal{A}$

(3) Für jede Folge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Mengen B_n aus $\mathcal{A}$ liegt $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ in $\mathcal{A}$.

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra in einer Menge Ω und Ω' eine Teilmenge von Ω, so ist die *Spur* von $\mathcal{A}$ in Ω'

$$\Omega' \cap \mathcal{A} := \{\Omega' \cap B : B \in \mathcal{A}\}$$

eine σ-Algebra in Ω'.

(b) Jeder Durchschnitt $\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ einer jeden Familie $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ von σ-Algebren in einer Menge Ω ist selbst wieder eine σ-Algebra in Ω.

Bitte die Lösungen der Aufgaben bis zum Dienstag, dem 08.05.07, 17.30 Uhr, in das Fach (7B) von Felix Ballani in der Arnimallee 3, 1. Stock, legen.