Freie Universität Berlin **SS 2006**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Konrad Polthier, Anja Krech

9. Übung zur Vorlesung „Analysis I“

Ausgabe: 20.06.06 Abgabe: 27.06.06

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass die Funktion $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto a^x$, für $a > 1$ streng monoton wachsend und für $0 < a < 1$ streng monoton fallend ist, und dass in beiden Fällen $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}_+^*$ abgebildet wird. Zeigen Sie weiterhin, dass die Umkehrfunktion $\log_a : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig ist und dass gilt:

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_+^*.$$

Aufgabe 2

Beweisen Sie:

(a) $\lim\limits_{x \searrow 0} x^x = 1,$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

Aufgabe 3

Für $x > 1$ seien $f_0(x)$ bis $f_5(x)$ auf $\mathbb{R}$ der Reihe nach definiert als

$$1,\ \ln(x),\ x^a,\ e^x,\ x^x,\ (x^x)^x,$$

wobei $a \in \mathbb{R}, a > 0$. Beweisen Sie, dass für $i, k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ mit $i < k$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f_i(x)}{f_k(x)} = 0.$$

Aufgabe 4

Sei $a > 0$. Die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien definiert durch

$$x_0 := a, \quad x_{n+1} := \sqrt{x_n}, \quad y_n := 2^n(x_n - 1) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Man beweise $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \ln a$.