**Freie Universität Berlin** **SS 2006**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Konrad Polthier, Anja Krech

# 8. Übung zur Vorlesung „Analysis I“

Ausgabe: 13.06.06 Abgabe: 20.06.06

---

### Aufgabe 1

Man sagt, die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ (mit $D \subset \mathbb{R}$) genüge auf $D$ einer *Lipschitz-Bedingung*, wenn es eine Konstante $L$ gibt, so dass

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \qquad \text{für alle} \quad x, y \in D.$$

(a) Zeigen Sie: Wenn $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ auf $D$ einer Lipschitz-Bedingung genügt, so ist $f$ stetig in $D$.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass die Funktionen $f(x) = |x|$, $g^+(x) = \max(0, x)$, $g^-(x) = \max(0, -x)$ stetig in $\mathbb{R}$ sind.

### Aufgabe 2

Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig mit

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^n} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x^n} = 0.$$

Für welche $n \in \mathbb{N}$ besitzt die Gleichung $f(x) = x^n$ mindestens eine Lösung in $\mathbb{R}$?
Tipp: Machen Sie eine Skizze für $n = 1, 2, 3$.

### Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass eine in einem Intervall stetige und injektive Funktion streng monoton ist.
Anleitung: Man führe die Annahme $a < b < c$, $f(a) < f(b)$, $f(b) > f(c)$ zum Widerspruch.

### Aufgabe 4

(a) Gegeben seien die beiden stetigen Funktionen

$$\begin{array}{rcl} f : [0,\infty[ & \longrightarrow & [0,\infty[, \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f^{-1} : [0,\infty[ & \longrightarrow & [0,\infty[ \\ x & \mapsto & \sqrt{x}. \end{array}$$

Zeigen Sie, dass $f^{-1}$ gleichmäßig stetig, aber $f$ nicht gleichmäßig stetig ist.

(b) Ist die Produktfunktion zweier gleichmäßig stetiger Funktionen gleichmäßig stetig?