Freie Universität Berlin **SS 2006**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Konrad Polthier, Anja Krech

6. Übung zur Vorlesung „Analysis I“

Ausgabe: 30.05.06 Abgabe: 06.06.06

Aufgabe 1

Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}$ heißt *offen*, wenn es zu jedem $a \in U$ ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass

$$]a-\epsilon, a+\epsilon[\subset U.$$

Man zeige: Jede offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}$ ist Vereinigung von abzählbar vielen offenen Intervallen.
(Zusatz: Man kann die Intervalle sogar paarweise punktfremd wählen.)

Aufgabe 2

Zeigen Sie:

(a) Jede unendliche Menge hat eine abzählbar unendliche Teilmenge.

(b) Eine Menge paarweise disjunkter Intervalle ist höchstens abzählbar.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie Supremum und Infimum der folgenden Mengen und prüfen Sie, ob diese Mengen ein Minimum oder ein Maximum besitzen:

(a) $\{\frac{|x|}{1+|x|} : x \in \mathbb{R}\}$

(b) $\{\frac{x}{1+x} : x > -1\}$

(c) $\{x + \frac{1}{x} : \frac{1}{2} < x \leq 2\}$

(d) $\{x : (x+1)^2 + 5y^2 < 4, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, wenn

$$\limsup a_n = \liminf a_n = a$$

gilt.