Freie Universität Berlin **SS 2006**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Konrad Polthier, Anja Krech

5. Übung zur Vorlesung „Analysis I“

Ausgabe: 23.05.06 Abgabe: 30.05.06

Aufgabe 1

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie, dass die Reihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$
für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ absolut konvergiert.

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$
konvergent, aber nicht absolut konvergent ist.

Aufgabe 2

Untersuchen Sie die Konvergenz der folgenden Reihen:

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ (c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n+7}{n^2-5n+3}$

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ (d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2+n}{n^3+1}$

Aufgabe 3

Berechnen Sie den Grenzwert der Reihen
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^s} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$
für $s = 2$ und $s = 4$. Dabei werde als bekannt vorausgesetzt, dass
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$
gilt.

Bitte wenden!

Aufgabe 4

(a) Beweisen Sie das *Reihenverdichtungskriterium*:
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen mit

$$a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots .$$

Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ genau dann konvergiert, wenn $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergiert.

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ konvergiert.