2. Übung zur Vorlesung „Analysis I“

Sommersemester 2006

Prof. Dr. Konrad Polthier
Anja Krech

Ausgabe: 02.05.06
Abgabe: 09.05.06

Aufgabe 1

(a) Zeigen Sie, dass für die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ gilt:

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \ldots < \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} > \ldots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n},$$

wobei für gerades n die beiden mittleren Koeffizienten zusammenfallen.

(b) Seien $n, k \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die Identität $\sum_{i=0}^{k} \binom{n+i}{i} = \binom{n+k+1}{k}$.

Aufgabe 2

Auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ wird eine Addition $+$ und eine Multiplikation $\cdot$ durch

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d) \quad \text{und} \quad (a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$$

definiert. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ ein Körper ist.

Aufgabe 3

Zeigen Sie an einem Beispiel, dass eine Menge K mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, die die folgenden Axiome erfüllt, kein Körper zu sein braucht:

(1) K mit $+$ ist eine abelsche Gruppe.

(2) $K \setminus \{0\}$ mit $\cdot$ ist eine abelsche Gruppe.

(3) Für alle $a, b, c \in K$ ist $a(b + c) = ab + ac$.

(Hinweis: Es gibt ein Beispiel mit einer Menge K mit 2 Elementen.)

Aufgabe 4

Beweisen Sie für $x, y \in \mathbb{R}$:

(a) $x < y \quad \Longrightarrow \quad x^3 < y^3$,

(b) $xy \leq \epsilon x^2 + \frac{1}{\epsilon} y^2$ für alle $\epsilon > 0$.