Freie Universität Berlin **SS 2006**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Konrad Polthier, Anja Krech

11. Übung zur Vorlesung „Analysis I“

Ausgabe: 04.07.06 Abgabe: 11.07.06

Aufgabe 1

Untersuchen Sie die folgenden drei Funktionen $f_j : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $j = 0, 1, 2$ auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit im Punkt $x_0 = 0$:

$$x \mapsto \begin{cases} x^j \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Aufgabe 2

Sei $f : \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ die durch

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

definierte Funktion.
Bestimmen Sie alle lokalen und absoluten Extrema von f.

Aufgabe 3

Beweisen Sie den *Verallgemeinerten Mittelwertsatz*:
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und seien $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, die in $]a, b[$ differenzierbar sind. Zeigen Sie: Es existiert ein $\xi \in]a, b[$, so dass

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi).$$

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x+x^2)-x}{x^2}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1-e^{x/2}}{x^3}$.