1. Übung zur Vorlesung „Analysis I“

Sommersemester 2006

Prof. Dr. Konrad Polthier
Anja Krech

Ausgabe: 25.04.06
Abgabe: 02.05.06

Aufgabe 1

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(a) $\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2$,

(b) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$,

(c) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k \right)^2$,

(d) 9 ist ein Teiler von $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$.

Aufgabe 2

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$(n-1)a^n + b^n \geq n a^{n-1} b \qquad \text{für } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

mit Gleichheit genau für $a = b$.

Aufgabe 3

Seien a, b, c, $d \in \mathbb{R}$, $b > 0$ und $d > 0$. Beweisen Sie die folgende Implikation:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

Aufgabe 4

Sei $K = \{0, 1, a, b\}$ ein Körper mit vier Elementen. Erstellen Sie die Verknüpfungstafeln für die Addition und Multiplikation in K.