# Einführung in die Mathematikdidaktik 20.1.2009

**Vorstellen einer „Schüler“-Unterrichtsstunde zu Thema:**

**Satz des Vieta**

**Beurteilung nach vorgegebenen Kriterien.**

Wdh.: Beispiel: „Subtraktion“

Auszug aus der Dissertation von Christopher Seyd:

Das profunde Verständnis fundamentaler Mathematik von Lehrkräften als Ausgangspunkt für eine Verbesserung der Unterrichtsqualität, Shanghai 2005.


Abb. 4: Auszug aus dem *"Zahlenbuch"* (Wittmann et al. 1996)

⇨ Verfahrensorientiertes Wissen

Wie könnte man verständnisorientiert unterrichten?

In einem Schweizer Schulbuch wird der Verständniskern auf der Basis des vorher erarbeiteten „gleichsinnigen Ergänzens“ explizit ausformuliert (s. Abb. 5).

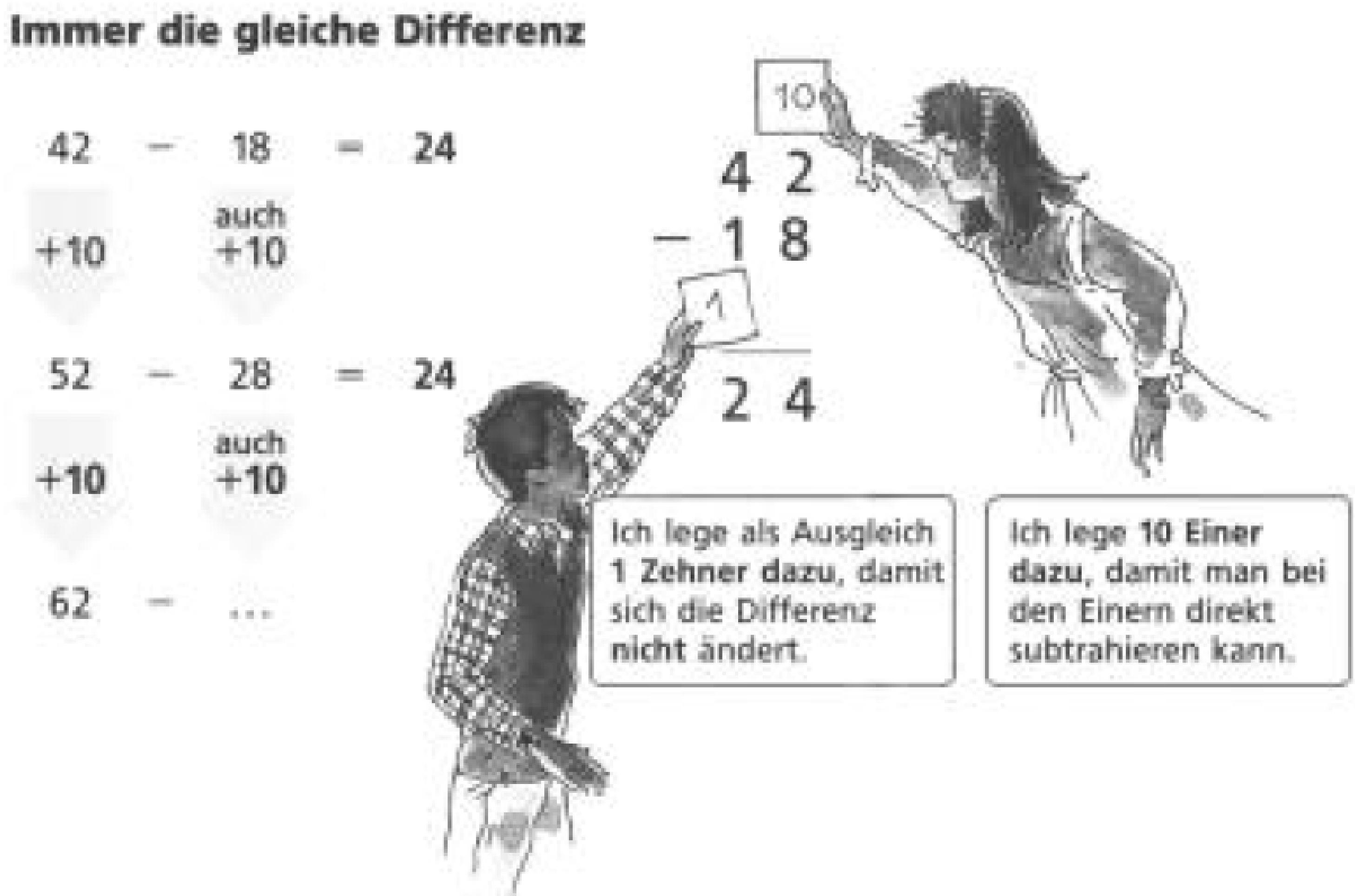



Abb. 5: Auszug aus dem Schulbuch für den Kanton Zürich; Hohl, W. u.a. (2000). „Mathematik 4“. Schülerbuch des Kantons Zürich. Zürich: Lehrbuchverlag des Kantons, S. 43

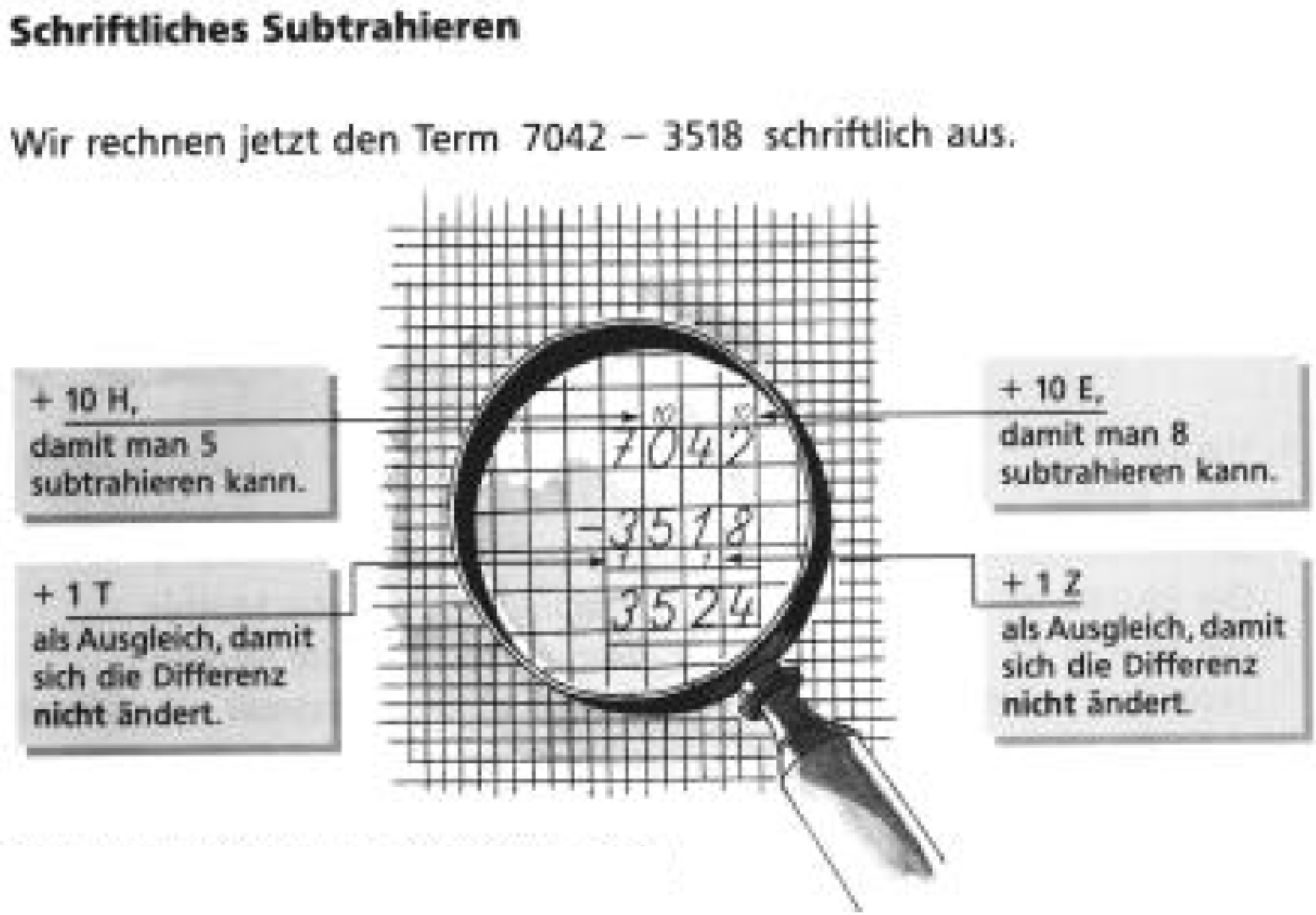



Abb. 5: Auszug aus dem Schulbuch für den Kanton Zürich; Hohl, W. u.a. (2000). „Mathematik 4“. Schülerbuch des Kantons Zürich. Zürich: Lehrbuchverlag des Kantons, S. 43

Dem gleichsinnigen Ergänzen sollten wiederum verständliche, schülergemäße Erklärungen des Stellenwertsystems vorangegangen sein. Diese ließen sich dann wie z.B. in Abb. 6 in die Erklärungen der schriftlichen Subtraktion mit Übertrag einbinden.

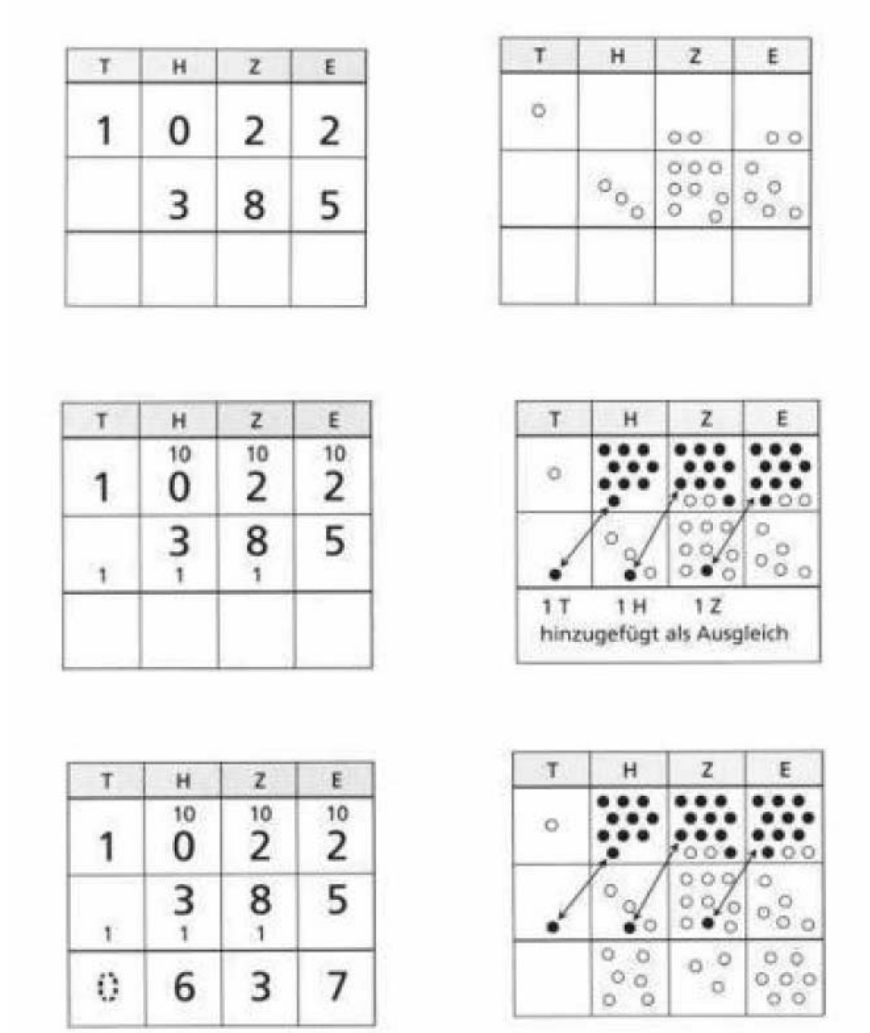



Abb. 6: Auszug aus dem Züricher Lehrerhandbuch (Hohl, W. u.a. 2000)

Eine so konstruierte Erklärung der schriftlichen Subtraktion mit Übertrag ließe in Hinblick auf den Verständniskern schon eher den Schluss zu, dass bereits erworbenes Vorwissen der Schüler miteinbezogen und somit in der Erklärung fest verankert wird.

Während in dem ersten Schulbuchbeispiel der Algorithmus als auszuführende Technik mechanisch erläutert und daher auch nur ebenso gelernt werden kann, macht die Veranschaulichung aus dem zweiten Beispiel ein Verstehen möglich, dem dann die Automatisierung folgen kann.

Was Ausubel et al. in Bezug auf diese Form des Wissenserwerbs, dem sinnvollen Lernen, schreiben, gilt gemeinhin als normativ:

> *„Je sinnvoller etwas gelernt wird, d.h. je besser es auf die kognitive Struktur des Lernenden bezogen wird, desto besser wird es auch behalten." (Ausubel et al. 1980, S. 169f.)*

Christopher Seyd: Das profunde Verständnis fundamentaler Mathematik
von Lehrkräften als Ausgangspunkt für eine Verbesserung der Unterrichtsqualität,
S. 38 – 40. Shanghai 2005.

Auf der anderen Seite ist es unbedingt nötig, zunächst die dem Verfahren zugrundeliegende Vorstellung durchdrungen zu haben, da sonst leicht der Eindruck entstehen könnte, es handele sich bei dem Ergänzen – in diesem Fall in der Einerspalte – um einen nicht erklärbaren Widerspruch: Es würde von einer größeren zu einer kleineren Zahl ergänzt, was innerhalb der natürlichen Zahlen nicht möglich wäre. Insofern kann eine ikonische Darstellung des Verfahrens, so wie die meisten Schulbücher es beinhalten, recht ungünstig sein, weil es auf diesem Wege für die Schüler nur schwer nachvollziehbar ist. Besser eignet sich hierfür das von Wittmann selbst im Lehrerhandbuch zur Erklärung herangezogene Zählermodell:

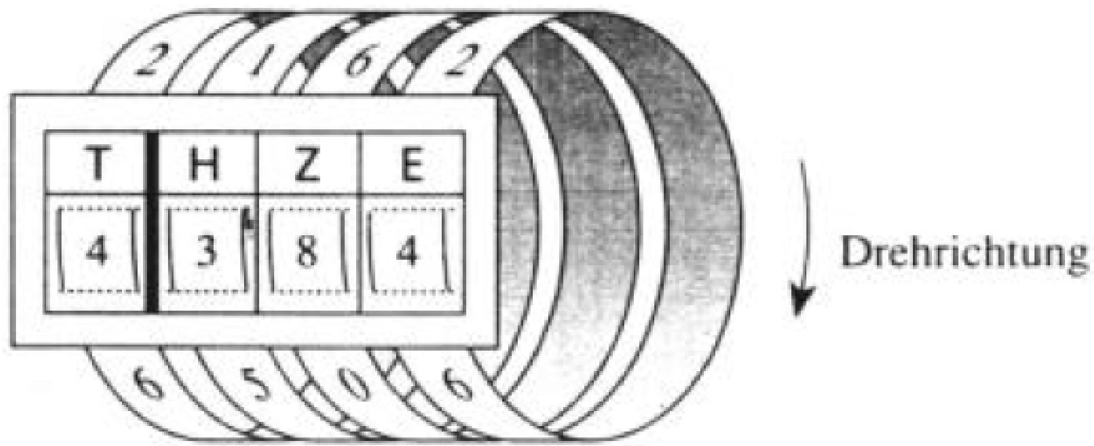



Abb. 21: „Zählermodell“ nach Wittmann et al. 1996

*"Als Ausgangspunkt und dauerhafte Verständnisgrundlage dient eine den Kindern bekannte Anwendungssituation für das Ergänzen: der Kilometerzähler (Auto, Fahrrad). Wenn man seine Funktionsweise analysiert, mit Plättchen an der Stellentafel nachlegt und ein Zählermodell mit Papier nachbaut* [s. Abb. 24, d. Verf.], *so ergibt sich völlig einsichtig das von der KMK-Konferenz vorgeschriebene Verfahren der schriftlichen Subtraktion. Wie schon bei der Einführung des Ergänzens auf Seite 8/9 hervorgehoben, handelt es sich beim Ergänzen um ein `Wegnehmen von unten', also um eine wirkliche Subtraktion, deren Ergebnis additiv berechnet wird.*

# Anwendungsbeispiel:

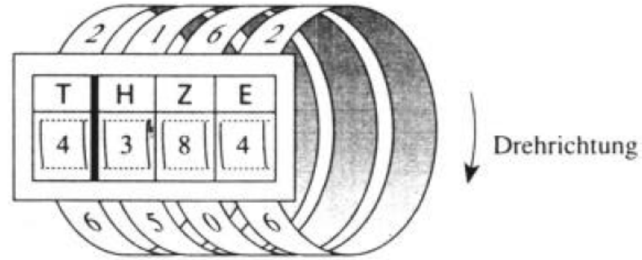



Abb. 21: „Zählermodell“ nach Wittmann et al. 1996

*Zählerstand bei der Abfahrt: 378*

*Zählerstand bei der Ankunft: 634*

*Man kann das Weiterdrehen des Zählers wie folgt beschreiben:*

- *6 Einer dazu, Zwischenstand 384, Zehner um 1 weitergesprungen (Übertrag beim Zehner)*
- *5 Zehner dazu, Zwischenstand 434, Hunderter um 1 weitergesprungen (Übertrag beim Hunderter)*
- *2 Hunderter dazu, Endstand 634.*

*Insgesamt hat sich der Zähler um 6 Einer, 5 Zehner und 2 Hunderter, also um 6+50+200=256 weitergedreht." (Wittmann et al. 1996, S. 169f.)*

Entscheidende Erkenntnis hierbei ist die Dynamik des Modells, die jeweils *zwei* Stellenwerte fokussiert: Ergänzt man beim Subtrahenden die Einerstelle um 6, so ist *im gleichen Moment* die Zehnerstelle um einen Zehner erhöht worden, so dass schon in der Zehnerspalte der Unterschied automatisch um 1 Z kleiner geworden ist (Übertrag). Diese Gleichzeitigkeit ist in einer ikonischen Darstellung nicht zu vermitteln und kann daher schnell zu Missverständnissen bei den Schülern oder Lehrern führen.

Christopher Seyd: Das profunde Verständnis fundamentaler Mathematik
von Lehrkräften als Ausgangspunkt für eine Verbesserung der Unterrichtsqualität,
S. 67 – 68. Shanghai 2005.

## Aspekte des Zahlbegriffs:
## (Ein weiterer Auszug aus der Dissertation von C. Seyd.)

Der Begriff "Zahl" kann als komplexes Konstrukt gesehen werden, das aus verschiedenen Teilaspekten besteht, die sich gegenseitig ergänzen (Neubrand/Möller 1999, Freudenthal 1973, Müller/Wittmann 1984, Padberg 1997, u.a.). Diese Teilaspekte sollen im Folgenden kurz referiert werden.

*1. Ordinalzahlen*

dienen der Beschreibung einer Reihenfolge und geben somit Antwort auf die Frage „der oder die wievielte?“. Die Ordinalzahlen selbst lassen sich wiederum in zwei Arten trennen:

a) Ordnungszahlen

   bestimmen die Reihenfolge innerhalb einer (total geordneten) Reihe, z.B.: "*Fabienne liegt beim Wettlauf an 3. Stelle.*"

b) Zählzahlen

   beschreiben die Reihenfolge (natürlicher) Zahlen innerhalb einer Reihe: "*Eins, zwei, drei,...*". Um diesen Zählprozess zu durchlaufen, ist nicht unbedingt eine reale oder vorgestellte zu zählende Menge notwendig, er kann auch unabhängig davon vollzogen werden.

*2. Kardinalzahlen*

Diese dienen der Beschreibung von Anzahlen, geben Antwort auf die Frage "wie viele?". Beispiel: "*Du hast 5 Bonbons*"

*3. Maßzahlen*

Natürliche Zahlen können zusammen mit Einheiten der Quantifizierung von Größen dienen und geben somit Antworten auf die Fragen „*wie lang?*“, „*wie groß?*“, „*wie viel wert?*“ etc.

*4. Operatoren*

Hier dienen natürliche Zahlen der Beschreibung der Vielfachheit eines Vorgangs. Sie liefern somit Antworten auf die Frage „*wie oft?*“.

*5. Rechenzahlen*

Hier werden Zahlen als Objekte behandelt, die bestimmten Regeln unterworfen sind. Auch diese können wiederum unter zwei verschiedenen Aspekten betrachtet werden:

a) Algorithmischer Aspekt

   Die natürlichen Zahlen werden als Ziffernreihen in Stellenwertsystemen dargestellt, mit denen man Rechenoperationen mit Hilfe von Algorithmen, z.B. der schriftlichen Subtraktion, durchführen kann.

b) Algebraischer Aspekt

   Beschreibt bestimmte Eigenschaften der natürlichen Zahlen beim Rechnen, z.B. $8+5=5+8$

*6. Zahlen als Codes*

Hier dienen natürliche Zahlen der Kennzeichnung. Sie sind somit Antworten auf die Frage: „welche Nummer?“. Beispiele: "Ich habe die Telefonnummer 46073883"; "Hamburg-Winterhude hat die PLZ 22299"

> *"Für den Unterricht kommt es darauf an, den Zahlbegriff vielseitig zu entwickeln und insbesondere das Zählen und Rechnen stets mit Sinn und Bedeutung zu füllen."*

| | |
|---|---|
| Müller, G.; Wittmann, E.Ch. (1984) | Der Mathematikunterricht in der Primarstufe ; Ziele, Inhalte, Prinzipien, Beispiele. 3., neubarb. Aufl., Vieweg : Braunschweig |

*"Keine der mathematischen Begründungen ist als Vorbild für die Einführung der natürlichen Zahlen in der Schule geeignet, weil*

a) *die Methodenreinheit mathematischer Begründungen der Komplexität des Zahlbegriffs nicht Rechnung trägt,*

b) *der logische Aufbau für die psychologische Bildung des Zahlbegriffs irrelevant ist."*

| | |
|---|---|
| Müller, G.; Wittmann, E.Ch. (1984) | <u>Der Mathematikunterricht in der Primarstufe ; Ziele, Inhalte, Prinzipien, Beispiele.</u> 3., neubarb. Aufl., Vieweg : Braunschweig |

***Rechenoperationen zu Grunde liegende Vorstellungen***

Je nach zugrundeliegendem Zahlaspekt basieren Rechenoperationen auf verschiedenen grundlegenden Vorstellungen. Auf diese Weise erhalten sie unterschiedliche Bedeutungen.

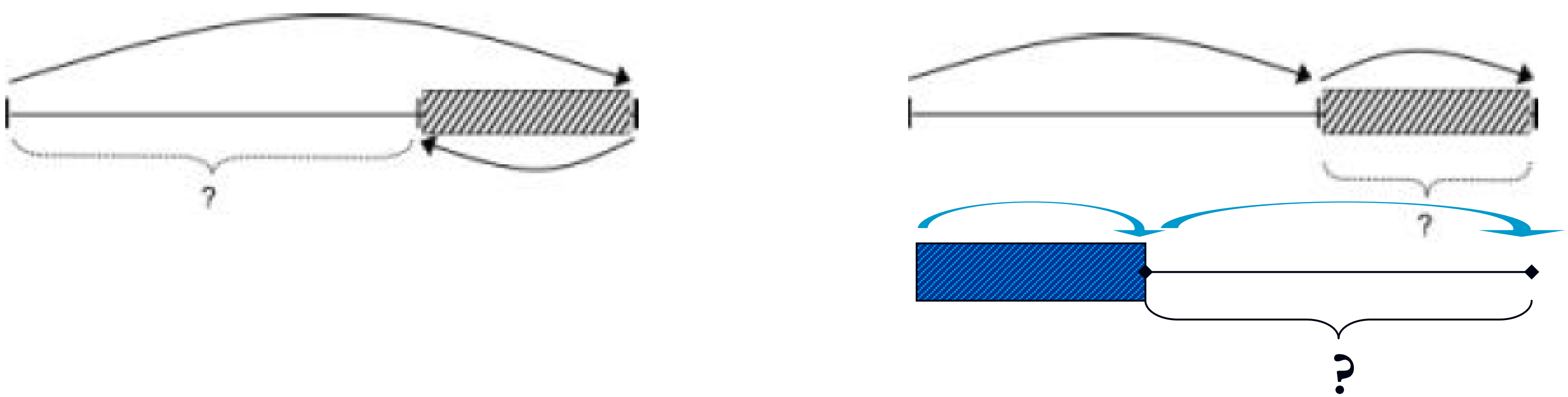
# Subtraktion

Die wohl natürlichste und naheliegendste der Subtraktion zugrunde liegende Vorstellung ist die des "Wegnehmens" oder "Abziehens" (**kardinaler Aspekt**). Aus einer vorhandenen Menge an Einheiten wird eine bestimmte *Anzahl* entfernt. In diesem Fall ist die Differenz die Menge, die "übrig bleibt" (s. Abb. 11a). Eine weitere Bedeutungsvariante des Kardinalzahlaspekts im Rahmen der Subtraktion ist die des Ergänzens. Es soll ermittelt werden, wie viele Elemente noch fehlen, um eine Menge einer bestimmten Mächtigkeit zu erhalten (s. Abb. 11b).

# Subtraktion


Abb. 11 a und b: kardinaler Aspekt der Subtraktion

Eine lineare Veranschaulichung dieser Grundidee wäre demnach folgendermaßen vorstellbar (Abb. 12a und b):



Legt man den **Ordinalzahlaspekt** zugrunde, gründet sich die Idee der Subtraktion in der Ermittlung der Differenz durch Weiterzählen oder Zurückzählen (s. Abb. 13):


Abb. 13: Ordinaler Aspekt der Subtraktion

Eine für das Verfahren der schriftlichen Subtraktion mit Übertrag unter Umständen (je nach Verfahrensweise) sehr wichtige Idee ist diese, die im **Maßzahlaspekt** begründet liegt: Wie groß ist der Unterschied? Wie in der Abb. 14 gut zu erkennen ist, kann der Unterschied (hier zwischen zwei bestimmten Punkten der Länge zweier Strecken) gleich bleiben, auch wenn sich die Anfangs- oder Endpunkte der Strecke und damit die gesamte Länge verändert hat. Diese Erkenntnis der "Konstanz der Differenz" ist wichtig für das Verständnis der Entstehung des Übertrags unter Zuhilfenahme des "gleichsinnigen Ergänzens".

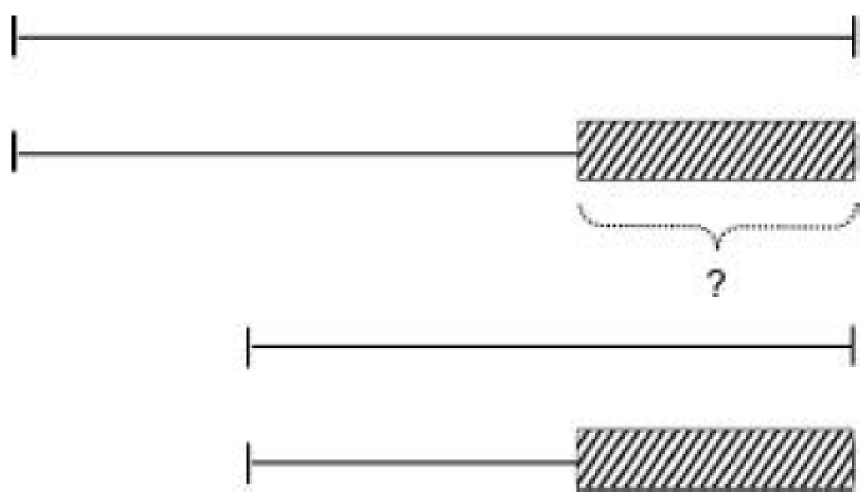



Abb. 14: Maßzahlaspekt der Subtraktion im Zusammenhang mit der „Konstanz der Differenz“

Ebenfalls kann die Subtraktion verstanden werden als Frage danach, wie oft eine bestimmte Menge oder Einheit einer vorhandenen noch hinzugefügt oder von ihr abgezogen werden soll (**Operatoraspekt**):

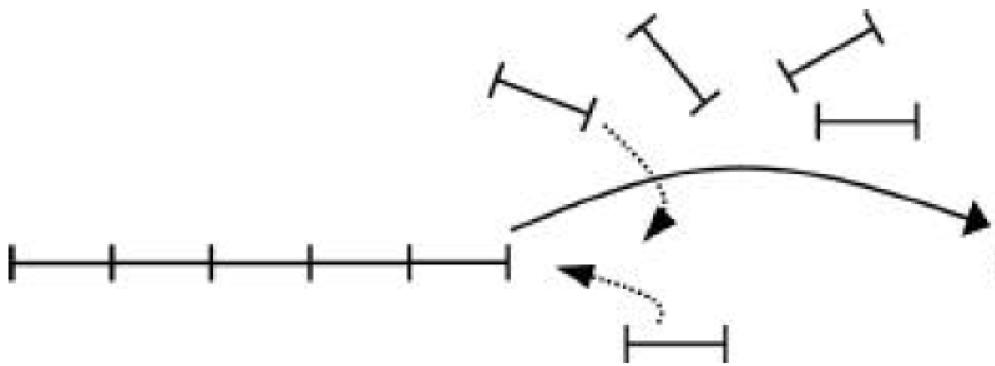


Abb. 15: Operatoraspekt der Subtraktion

Schließlich ist die Subtraktion natürlich vorstellbar als formale Darstellung:

$$9 - 4 = 5 \qquad \text{oder:} \quad 9 + ? = 4$$

Neben diesem **algorithmischen Rechenaspekt** werden im Rahmen bestimmter **algebraischer** Notierungen auch bestimmte Gesetzmäßigkeiten oder Bestimmungen der Subtraktion festgehalten, wie z.B. die Eigenschaft als **Umkehrung der Addition**:

> *"Existiert zu zwei natürlichen Zahlen a und b eine natürliche Zahl x, die die Gleichung* $a + b = x$ *erfüllt, so heißt* $x = b - a$ *Differenz von b und a."*
>
> *(Schäfer/Georgi/Trippler 1999, S. 12)*

Christopher Seyd: Das profunde Verständnis fundamentaler Mathematik
von Lehrkräften als Ausgangspunkt für eine Verbesserung der Unterrichtsqualität,
S. 55 – 59. Shanghai 2005.