Das symmetrische Rendezvous-Dilemma

Bachelor-Arbeit

Berlin, 23.9.2021

Christoph Andreas Meiske

Freie Universität Berlin

Betreuer:	Prof. Dr. László Kozma
Erstgutachter:	Prof. Dr. László Kozma
Zweitgutachter:	PD Dr. rer. nat. Klaus Kriegel

Inhaltsverzeichnis

1 Symmetrische Rendezvous-Suche an n Orten

Zwei Personen haben sich für ein Treffen in einem Park verabredet, in dem sie noch nie zuvor gewesen waren. Als sie getrennt im Park ankommen, sind beide überrascht, dass es sich um ein riesiges Gelände handelt. In dieser Situation muss sich jede Person entscheiden, ob sie an einem festen Ort wartet, in der Hoffnung, dass der andere sie findet, oder ob sie sich selbst auf die Suche macht, in der Hoffnung, dass es auf diese Weise zu einem Treffen kommt.

Wenn sich beide für das Warten entscheiden, werden sie sich nie treffen. Wenn sie sich beide entscheiden zu gehen, besteht die Möglichkeit, dass sie sich treffen, aber auch die Möglichkeit, dass sie sich immer verfehlen.
Wenn sich einer entscheidet zu warten und der andere zu gehen, treffen sie sich mit Sicherheit, doch dies würde einer vorherige Absprache verlangen. Die Frage, die sich also stellt, ist: Wie sollen sie vorgehen, um sich möglichst schnell zu treffen?

Zwei naheliegende *Strategien*[1] sind die beiden folgenden:

Move-at-random:
Wenn bei jedem diskreten Schritt 1, 2, . . . jeder Spieler zu einem zufällig gewählten Ort geht, dann ist die erwartete Zeit bis zum Treffen n:

$$\mathbb{E} = 1 + \frac{n-1}{n}\mathbb{E} \Rightarrow \mathbb{E} = n.$$

Wait-for-mommy:
Wenn einer der Spieler an seinem Ort verbleibt, während der andere Spieler in zufälliger Reihenfolge $n-1$ Orte (alle Orte außer seinem Heimatort) absucht, werden sie sich in der erwarteten Zeit $n/2$ treffen:

$$\mathbb{E} = \frac{1}{n-1}\left(1 + 2 + ... + (n-1)\right) = \frac{1}{2}n.$$

[1] Der Begriff *Strategie* beschreibt die Reihenfolge, in der ein Spieler verschiedene Orte besucht.

Für die in dieser Arbeit ausführlich vorgestellten Probleme werden diskrete[2] Räume betrachtet und es gelten folgende Festlegungen:

1. Zwei Spieler werden auf verschiedene zufällig ausgewählte Orte verteilt, z. B. auf zwei Knoten des vollständigen Graphen K_n.
2. Es gibt keine allgemeingültige Beschriftung der Orte.
3. Zu jeder Zeiteinheit kann jeder Spieler einen Schritt gehen und dabei einen der n Orte besuchen, er kann aber auch an seinem aktuellen Ort warten.
4. Die Spieler verfolgen die gleiche *Strategie*. Sie dürfen aber auch per Zufall zwischen *Strategien* wählen, müssen dann aber die gleiche, nicht-deterministische *Strategie* nutzen.

Bei *Wait-for-mommy* beispielsweise gehen beide Spieler unterschiedlich vor, diese *Strategie* ist daher asymmetrisch. Anderson und Weber haben 1990 folgendes Theorem aufgestellt und bewiesen [AW90]:

Theorem 1. *In dem asymmetrischen Rendezvous-Suchspiel auf n Orten ist die optimale Strategie „Wait-for-mommy".*

Aus der Erkenntnis dieses Theorems entwickelten die beiden Autoren eine *Strategie*, die auch für den symmetrischen Fall gute Ergebnisse liefert:

Die Anderson-Weber-Strategie:
Es handelt sich um eine *gemischte Strategie*[3], die in Blöcken von $n-1$ Schritten vorgeht. In jedem der aufeinanderfolgenden Blöcke bleibt ein Spieler mit der Wahrscheinlichkeit p an seinem Heimatort oder er macht mit der Wahrscheinlichkeit $1-p$ eine zufällig ausgewählte Tour durch seine $n-1$ Nicht-Heimatorte. Mit einer Wahrscheinlichkeit von $2p(1-p)$ wartet einer der Spieler, während der andere Spieler auf Tour geht.
Die *Anderson-Weber-Strategie* (kurz: *AW-Strategie*) ist eine *k-Markov-Strategie*. Dieser Begriff kommt aus der Spieltheorie und wird in der vorliegenden Arbeit auf folgende Weise interpretiert: Unter einer *k-Markov-Strategie* versteht man die Wiederholung eines zufällig ausgewählten k-Tupels an Schritten bis ein Rendezvous stattfindet.

---

[2] Beim Rendezvous-Dilemma können natürlich auch nicht-diskrete Räume betrachtet werden, siehe Kapitel 3.2 Astronautenproblem.

[3] Bei einer *gemischten Strategie* wählen die Spieler per Zufall aus mehreren (reinen) *Strategien* aus.

1.1 Symmetrische Rendezvous-Suche an drei Orten

Bei der symmetrischen Rendezvous-Suche an drei Orten geht die *Anderson-Weber-Strategie* in Blöcken von zwei Schritten vor. Die erwartete Begegnungszeit $\mathbb{E}$ dieser *Strategie* hängt in folgender Weise von der Bleibewahrscheinlichkeit p ab:

$$\mathbb{E} = p^2(2+\mathbb{E}) + 2p(1-p)\cdot\frac{3}{2} + (1-p)^2\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} + \left(1-\frac{1}{2}\right)(2+\mathbb{E})\right] \tag{1.1}$$

Die Summanden der Gleichung kann man sich wie folgt erklären:

1) Wenn beide Spieler an ihrem jeweiligen Heimatort bleiben, treffen sie sich nicht und befinden sich nach zwei Zeiteinheiten in der gleichen Situation wie zu Beginn.

2) Wenn einer der Spieler an seinem Heimatort bleibt, während der andere Spieler seine zwei Nicht-Heimatorte besucht, dann treffen sie sich in der erwarteten Zeit $\frac{3}{2}$; das ist erwartete Begegnungszeit von *Wait-for-mommy* in drei Räumen.

3) Wenn beide Spieler ihre jeweiligen Nicht-Heimatorte besuchen, treffen sie sich mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Und unter der Bedingung, dass sie sich treffen, treffen sie sich in der erwarteten Zeit $\frac{3}{2}$. (Sie treffen sich mit gleicher Wahrscheinlichkeit nach einem oder nach zwei Schritten.)

Die Gleichung (1.1) hat folgende Lösung

$$\mathbb{E} = \frac{3p^2 - 2p + 7}{2 + 4p - 6p^2}$$

Für das Minimum von $\mathbb{E}$ errechnet man $p = \frac{1}{3}$, dort ist $\mathbb{E} = \frac{5}{2}$.

Optimalität der Anderson-Weber-Strategie

Wenn man T als den Schritt bezeichnet, in dem sich die beiden Spieler treffen, gilt für den Erwartungswert $\mathbb{E} = \sum_{i=0}^{\infty} P(T > i)$. Um diese Summe zu minimieren wäre es hilfreich, wenn die *AW-Strategie* jeden Term der Summe einzeln minimieren würde. Dies ist jedoch nicht der Fall. Insbesondere gilt für die *AW-Strategie*: $P(T > 4) = 1/9$.

Man kann jedoch eine *Strategie* finden, bei der $P(T > 4) = 1/10$ ist. Das ist eine gewisse Überraschung und zeigt, dass $\mathbb{E} = \sum_{i=0}^{\infty} P(T > i)$ nicht minimiert werden kann, indem man einfach jeden Term der Summe minimiert.

Numerische Untersuchungen führten Richard Weber 2009 zur Vermutung, dass die *AW-Strategie* die folgende Gleichung minimiert [Web09a]:

$$E^*[\min\{T; k+1\}] = \sum_{i=0}^{k} P(T > i) \tag{1.2}$$

Die Gleichung (1.2) erklärt sich wie folgt: Durch $E^*[\min\{T; k+1\}]$ wird das Minimum von T und $k+1$ ausgewählt, es werden zwei Fälle unterschieden:

1. Fall $T < k+1$**:** Aus $\mathbb{E} = \sum_{i=0}^{\infty} P(T > i)$ folgt $\mathbb{E} = \sum_{i=0}^{k} P(T > i)$, denn wegen $T \leqslant k$ ist $P(T > k) = 0$.

2. Fall $T \geqslant k+1$**:** Es gilt die Gleichung $E^*[\min\{T; k+1\}] = k+1 = \sum_{i=0}^{k} P(T > i)$, denn die Summe besteht aus $k+1$ Termen, die wegen $T \geqslant k+1$ alle gleich eins sind.

Bei $E^*[\min\{T; k+1\}]$, also der linken Seite von Gleichung (1.2), handelt es sich um die erwartete Begegnungszeit für das modifizierte Problem, in welchem sich die Spieler, wenn sie sich nach dem k-ten Schritt nicht getroffen haben, im Zeitpunkt $k+1$ treffen. Für $T < k+1$ (oben, 1. Fall) ist deshalb $E^*[\min\{T; k+1\}] = \mathbb{E}\ \ (= \sum_{i=0}^{k} P(T > i))$.

Für jedes k soll die untere Schranke von $E^*[\min\{T; k+1\}]$ mit ω_k bezeichnet werden. Zu zeigen ist, dass die *AW-Strategie* den Wert ω_k für alle k erreicht, dass also diese *Strategie* die Teilsumme $\sum_{i=0}^{k} P(T > i)$ für alle k minimiert.

Theorem 2. *Die Anderson-Weber-Strategie ist optimal für die symmetrische Rendezvous-Suche auf drei Orten, indem sie $E^*[\min\{T; k+1\}]$ für alle $k = 1, 2, ...$ auf ω_k minimiert, mit*

$$\omega_k = \begin{cases} \frac{5}{2} - \frac{5}{2} \cdot 3^{-\frac{k+1}{2}}, & \text{für } k \text{ ungerade} \\ \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \cdot 3^{-\frac{k}{2}}, & \text{für } k \text{ gerade} \end{cases}$$

Der optimale (minimale erreichbare) Wert von $\mathbb{E}$ ist somit $\omega = \frac{5}{2}$.

Die Beweisidee beruht auf folgenden Überlegungen: Angenommen, die drei Standorte sind auf einem Kreis angeordnet. Jeder Spieler bezeichnet die drei Orte a, b und c, wobei a jeweils dem eigenen Heimatort entspricht und sich durch die Bezeichnung eine festgelegte Bewegungsrichtung ergibt (auf a folgt b, auf b folgt c und auf c folgt a). Eine Sequenz von Zügen eines Spielers kann nun beschrieben werden. Die ersten sechs Züge eines Spielers könnten z.B. *ababbc* sein. Man erleichtert sich das Problem, indem man den Spielern einen gemeinsamen Richtungssinn auf dem Kreis gibt. (Auf Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte, hat dies aber keinen Einfluss. Man wird an den *Strategien* der Spieler sehen, dass aus der Kennzeichnung eines gemeinsamen Richtungssinnes kein Vorteil entsteht.)

Angenommen, Spieler II beginnt auf der Position b des Spielers I. Es soll nun folgende Matrix betrachtet werden:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Zeilen von B_1 entsprechen Spieler I, der gemäß seiner Notation a, b bzw. c aufsucht. Die Spalten von B_1 entsprechen Spieler II, der (gemäß seiner Notation) a, b bzw. c aufsucht. Das Element $B_1(i,j)$ hat den Wert 1, wenn sie sich nach dem ersten Schritt *nicht* getroffen haben, und den Wert 0, wenn sie sich getroffen haben. So ist beispielsweise $B_1(1,3) = 0$, da Spieler I zu seinem a und Spieler II zu seinem c (dem a in der Notation des Spielers I) geht, in diesem Fall treffen sich die Spieler. Die transponierte Matrix B_1^T stellt die gleichen Ereignisse dar (die Spieler treffen sich bzw. treffen sich nicht), nur dass hier der Spieler II auf der Position c des Spielers I beginnt.

Es sei $\overline{B}_1 := \frac{1}{2}(B_1 + B_1^T)$ der Mittelwert von B_1 und B_1^T. Da die Startposition der Spieler zufällig gewählt wird und deshalb der Spieler II mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf den Positionen b und c des Spielers I beginnt, ist das Problem der Minimierung der Wahrscheinlichkeit, sich nach dem ersten Schritt nicht getroffen zu haben, das der Minimierung von $p^T \left(\frac{1}{2}(B_1 + B_1^T)\right) p = p^T \, \overline{B}_1 p$ über alle Wahrscheinlichkeitsvektoren $p \in \triangle_1$, wobei $\triangle_k = \{p : p \in \mathbb{R}^{3^k},\ p \geqslant 0,\ e^T p = 1\}$ und e ein Vektor mit Einsen ist.

Die Indikatormatrix für das Nichttreffen innerhalb von zwei Schritten lautet:

$$B_2 := B_1 \otimes B_1 = \begin{pmatrix} B_1 & B_1 & 0 \\ 0 & B_1 & B_1 \\ B_1 & 0 & B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In dieser Gleichung steht $\otimes$ für das Kronecker-Produkt[4] zweier Matrizen.

Die Zeilen 1 bis 9 (bzw. Spalten 1 bis 9) entsprechen jeweils dem Spieler I (bzw. II), der das Zugmuster aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb bzw. cc über die ersten beiden Schritte vollzieht.

Zum Beispiel stellt $B_2(2,4)$ das Ereignis dar, dass Spieler I das Zugmuster ab und Spieler II das Zugmuster ba wählt. Da Spieler II auf Position b des Spielers I beginnt, würde Spieler I das Zugmuster cb seines Partners beobachten. Die Spieler haben sich in b getroffen und deshalb ist $B_2(2,4) = 0$.

Behauptung. *Die AW-Strategie minimiert $P(T > 2)$*

Beweis: Mit $\overline{B}_2 := \frac{1}{2}(B_2 + B_2^T)$ folgt:

$$P(T>2) = p^T\,\overline{B}_2\,p = p^T \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} p \tag{1.3}$$

Diese quadratische Form[5] ist über alle Wahrscheinlichkeitsvektoren p zu minimieren, dabei geben die p_i $(1 \leqslant i \leqslant 9)$ an, mit welcher Wahrscheinlichkeit jeder Spieler aus seinen Zugmustern wählt.

Ein Minimierer ist $p^T = \frac{1}{2}(1,0,0,0,0,1,0,1,0)$. Er beschreibt die *AW-Strategie*, da aa, bc und cb gleich wahrscheinlich sind. Ein weiterer Minimierer ist $p = \frac{1}{2}(0,1,0,1,0,0,0,0,1)$, hier sind ab, ba und cc gleich wahrscheinlich. Auch dieser zweite Minimierer entspricht der *AW-Strategie*.

[4] Seien $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ und $B \in \mathbb{R}^{p,q}$ zwei Matrizen. Dann ist das **Kronecker-Produkt** der Matrizen A und B definiert als $A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$.

[5] Sei $(x_1,..,x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Dann heißt x^TAx **quadratische Form.**

Mit der *AW-Strategie* liegt also die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Spieler innerhalb der ersten zwei Schritte *nicht* treffen, bei $\frac{1}{3}$, was man mit Hilfe der Gleichung (1.3) leicht errechnen kann. Wählen die Spieler jedoch ihre beiden Schritte zufällig unter allen Zugmustern aus, gilt also $p = \frac{1}{9}(1,1,1,1,1,1,1,1,1)$, so ist die Wahrscheinlichkeit sich *nicht* zu treffen, $p^T\,\overline{B}_2\,p = \frac{4}{9}$, also höher.

Es ist zu prüfen, ob die *AW-Strategie* die quadratische Form $p^T\,\overline{B}_2 p$ minimiert. Das erweist sich jedoch als schwierig, da $\overline{B}_2$ nicht positiv semidefinit ist. So hat $\overline{B}_2$ bei $p = \frac{1}{9}(1,1,1,1,1,1,1,1,1)$ ein lokales Minimum, welches aber kein globales Minimum ist.

Um die ω_k zu berechnen, muss man berücksichtigen, dass sich die Spieler zu Beginn in verschiedenen Räumen aufhalten und daher mindestens einen Schritt gehen müssen um sich zu finden. Nach jedem Fehlversuch gehen sie einen weiteren Schritt. Das führt zu folgender Gleichung: $E[\min\{T; k+1\}] = \sum_{i=0}^{k} P(T > i) = p^T M_k p$, wobei:

$$\begin{aligned} &M_1 = J_1 + B_1 \\ &M_k = J_k + B_1 \otimes M_{k-1} = J_k + B_1 J_{k-1} + ... + B_{k-1} \otimes J_1 + B_k \end{aligned} \tag{1.4}$$

Dabei ist J_k eine $3^k \times 3^k$ - Matrix, die nur aus Einsen besteht. Es folgt:

$$\omega_k = \min_{p \in \triangle_k} \{p^T M_k\, p\} = \min_{p \in \triangle_k} \{p^T\, \overline{M}_k\, p\}.$$

Wie bei den Matrizen $\overline{B}_k$ ist auch hier das minimierende p schwer zu finden, da für $k \geqslant 2$ die Matrix $\overline{M}_k$ nicht positiv semidefinit ist. Man kann aber zumindest eine untere Schranke für ω_k finden, wenn man die Matrizen $\overline{H}_k$ betrachtet, für die die Ungleichung $\overline{M}_k \geqslant \overline{H}_k \geqslant 0$ gilt. (Diese Ungleichung soll für jedes Paar von Elementen der Matrizen gelten.)

Für solche Matrizen gilt $p^T\,\overline{M}_k\,p \geqslant p^T\,\overline{H}_k\,p$ für alle $p \geqslant 0$, und deshalb

$$\omega_k = \min_{p \in \triangle_k} \{p^T\, \overline{M}_k\, p\} \geqslant \min_{p \in \triangle_k} \{p^T\, \overline{H}_k\, p\}$$

Nun bestimmt man für jedes k die größtmögliche Matrix $\overline{H}_k$, die einerseits positiv semidefinit ist und andererseits die Gleichung $\overline{H}_k \leqslant \overline{M}_k$ erfüllt. Wenn $\overline{p}$ die quadratische Form $p^T\,\overline{H}_k\,p$ minimiert, dann ist $\overline{p}^T\,\overline{H}_k\,\overline{p}$ eine untere Schranke für das Minimum von $p^T\,\overline{M}_k\,p$. Wenn zusätzlich $\overline{p}^T\,\overline{M}_k\,\overline{p} = \overline{p}^T\,\overline{H}_k\,\overline{p}$ gilt, dann wird auch $p^T\,\overline{M}_k\,p$ durch $\overline{p}$ minimiert.

Wenn man $k = 2$ und $\overline{p}^T = \frac{1}{3}(1,0,0,0,0,1,0,1,0)$ setzt, berechnet sich das Produkt aus

$\overline{H}_2$ und p wie folgt:

$$\overline{H}_2\overline{p} = \begin{pmatrix} 3 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & 2 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 2 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} & 3 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 2 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & 3 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 2 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 2 \\ 2 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 3 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & 2 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 2 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 3 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & 3 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 2 \\ 2 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 2 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 3 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & 2 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 2 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 3 & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 2 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Das heißt, $\overline{p}$ erfüllt die Karush-Kuhn-Tucker-Bedingung[6] für ein lokales Minimum von $p^T\,\overline{H}_2\,p$ und es ist $\overline{p}^T\,\overline{H}_2\,\overline{p} = 2$. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass auch $\overline{p}^T\,\overline{M}_2\,\overline{p} = 2$ gilt. Die *AW-Strategie* führt also zum Erwartungswert $\omega_2 = 2$. Treffen die Spieler hingegen mit $\hat{p}^T = \frac{1}{9}(1,1,1,1,1,1,1,1,1)$ eine rein zufällige Auswahl unter allen Zugmustern, so ergibt sich $\hat{p}^T\,\overline{M}\hat{p} = \frac{19}{9} > 2$.

Die Betrachtung der Fälle $k = 1$ und $k = 2$ diente dazu, Ideen für die Beweisführung des Theorems 2 zu sammeln. Das Theorem ist bewiesen, wenn man für jedes k eine Matrix H_k finden kann, so dass

i) $M_k \geqslant H_k \geqslant 0$ mit M_k wie in Gleichung (1.4) definiert,

ii) $\overline{H}_k$ positiv semidefinit ist und

iii) $p^T H_k\, p$ über $p \in \triangle_k$ auf ω_k durch $\hat{p} = e_k/3^k$ minimiert wird, wobei der Vektor e_k ausschließlich aus 3^k Einsen besteht.

Zu (iii): Der Wahrscheinlichkeitsvektor $\hat{p}$ entspricht der zufälligen Suche der Spieler innerhalb der n Räume, $\hat{p} = e_k/3^k$ soll $p^T H_k\, p$ auf ω_k minimieren. Das heißt aber *nicht*, dass auch $\hat{p}^T M_k\,\hat{p} = \omega_k$ gilt. Zu zeigen ist also zusätzlich, dass $\overline{p}^T M_k\,\overline{p} = \omega_k$, wenn $\overline{p}$ der Wahrscheinlichkeitsvektor der *AW-Strategie ist.*

Es ist leicht, Punkt (i) zu beweisen, aber es ist schwierig, die Punkte (ii) und (iii) zu beweisen. Der Beweis, der auf intensiver numerische Forschung beruht, wurde von Richard Weber 2009 erbracht [Web09a]. Auf die restliche Beweisführung soll an dieser Stelle verzichtet werden.

[6] Die Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen sind ein notwendiges Optimalitätskriterium erster Ordnung in der nichtlinearen Optimierung.

1.2 Symmetrische Rendezvous-Suche an vier Orten

Im letzten Kapitel wurde gezeigt, dass die *AW-Strategie* für drei Räume optimal ist. Doch ist sie auch für jede andere Zahl von Räumen optimal? Gibt es speziell für $n = 4$ eine bessere *Strategie*? Bei der *AW-Strategie* für $n = 4$ bleibt jeder der beiden Spieler unabhängig vom jeweils anderen Spieler mit der Wahrscheinlichkeit p für drei Zeiteinheiten an seinem Heimatort oder er macht mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p$ eine zufällig gewählte Tour durch seine drei Nicht-Heimatorte. Dies führt zu einem Rendezvous in einer erwarteten Anzahl von Schritten $\mathbb{E}$, wobei

$$\begin{aligned}\mathbb{E} &= p^2(3+\mathbb{E}) + 2p(1-p)\cdot 2 + (1-p)^2\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{9} + \left(1-\frac{1}{2}\right)(3+\mathbb{E})\right] \\ &= \frac{25p^2 - 14p + 43}{9(1+2p-3p^2)}\end{aligned}$$

Die Summanden dieser Gleichung kann man sich wie folgt erklären:

1) Wenn beide Spieler am Heimatort bleiben, treffen sie sich nicht.

2) Wenn einer der Spieler am Heimatort bleibt, während der andere Spieler seine drei Nicht-Heimatorte besucht, dann treffen sie sich im Mittel nach zwei Zeiteinheiten.

3) Wenn beide Spieler ihre jeweiligen Nicht-Heimatorte besuchen, treffen sie sich mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ und unter der Bedingung, dass sie sich treffen, treffen sie sich in der erwarteten Zeit $\frac{16}{9}$.

Das Minimum von $\mathbb{E}$ wird bei $p = \frac{1}{4}\left(3\sqrt{681} - 77\right) \approx 0{,}321983$ erreicht, dort ist $\mathbb{E} = \frac{1}{12}\left(15 + \sqrt{681}\right) \approx 3{,}42466$.

Falls mindestens einer der Spieler an seinem Heimatort wartet, wird man die erwartete Begegnungszeit gegenüber der *AW-Strategie* nicht verringern können. Denn wenn beide Spieler warten, können sie sich nicht begegnen. Und wenn genau einer der Spieler wartet, handelt es sich um *Wait-for-mommy* mit der erwarteten Begegnungszeit $n/2$.

Angenommen, Spieler I hat Ort 1 als seinen Heimatort, und Spieler II hat Ort 2 als seinen Heimatort. Man kann sich vorstellen, dass jeder Spieler seine Nicht-Heimatorte als *a, b, c* bezeichnet und so ist eine Tour durch seine Nicht-Heimatorte eine von sechs möglichen Touren: *abc, acb, bac, bca, cab* und *cba*. Für den Fall, dass Spieler I (*a, b, c*) = (3, 2, 4) und Spieler II (*a, b, c)* = (4, 1, 3) gewählt hat, berechnet man folgende

Matrix:

$$B = \begin{pmatrix} X & X & X & 3 & 1 & 1 \\ X & X & 2 & X & 1 & 1 \\ X & 2 & X & 2 & X & 3 \\ 3 & X & 2 & X & 2 & X \\ 1 & 1 & X & 2 & X & X \\ 1 & 1 & 3 & X & X & X \end{pmatrix},$$

wobei die Zeilen und Spalten so angeordnet sind, dass sie *abc, acb, bac, bca, cab* und *cba* entsprechen. Falls sich die Spieler innerhalb von drei Schritten treffen, dann zeigt der Zahleneintrag die Zahl der Schritte bis zum Treffen an. Das Symbol „X" zeigt an, dass sich die Spieler auf ihrer (aus drei Schritten bestehenden) Tour nicht getroffen haben. Beispielsweise entspricht das Matrixelement $B_{2,4}$ $(= X)$ den Touren 341 und 134 der Spieler I bzw. II: die Spieler treffen sich nicht. Hingegen entspricht das Matrixelement $B_{3,2}$ $(= 2)$ den Touren 234 und 431 der Spieler I bzw. II: die Spieler haben sich beim zweiten Schritt getroffen.

Da jeder Spieler seine Nicht-Heimatorte in genau sechs verschiedenen Reihenfolgen anordnen kann, gibt es 36 solcher Matrizen, über die man den Durchschnitt bilden muss. Folgendes können die Spieler schlussfolgern, falls sie sich nicht getroffen haben:

1) Wenn ein Spieler drei Schritte lang an seinem Heimatort blieb und es nicht zu einem Treffen kam, dann muss der andere Spieler auch zu Hause geblieben sein.

2) Wenn ein Spieler drei Schritte lang auf Tour war und den anderen Spieler nicht getroffen hat, dann muss der andere Spieler auch auf Tour gewesen sein.

Nach $3k$ Schritten $(k \in \mathbb{N})$ weiß also jeder Spieler genau, wie oft beide Spieler auf Tour gewesen sind. Um verschiedene Touren zu unterscheiden, bezeichnet man die erste (zufällig gewählte) Tour, die ein Spieler macht, mit A. Von den folgenden Touren wird die erste Tour, die sich von A unterscheidet, B genannt. Auf diese Weise werden die Bezeichnungen der Touren fortgeführt. So bedeutet zum Beispiel AAB, dass ein Spieler zuerst zwei gleiche Touren macht und als drittes eine Tour unter den restlichen fünf Touren zufällig auswählt.

Zunächst wird ein modifiziertes Problem betrachtet, bei dem beide Spieler einen *t-Schritt* machen. Das bedeutet, dass sie sich jeweils durch alle ihre Nicht-Heimatorte bewegen. Man möchte die bis zur Begegnung erwartete Anzahl von t-Schritten minimieren. Beim ersten *t-Schritt* geht jeder der Spieler die Tour A und die Wahrscheinlichkeit eines Treffens ist $1/2$. Sei P_1 diejenige $1{\times}1$-Matrix, die aus dem Element $1/2$ besteht. Sie beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Spieler nach einem Schritt *nicht* getroffen haben.

Wenn eine *1-Markov-Strategie* verwendet wird, also aufeinanderfolgende *t-Schritte* zufällig ausgewählt werden, dann gilt für den Erwartungswert:

$$\mathbb{E} = 1 \times (1 + \frac{1}{2}\mathbb{E}) \times 1 \Rightarrow \mathbb{E} = 2$$

In den ersten beiden *t-Schritten* können die Spieler entweder das Tourenmuster AA oder AB nutzen. Die Wahrscheinlichkeit, dass sie sich nach Ende der zweiten Tour noch nicht getroffen haben, wird durch folgende Matrix beschrieben:

$$P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{13}{50} \end{pmatrix}$$

Man kann prüfen, dass P_2 ist positiv definit[7] ist ($P_2 \succ 0$). Für eine *2-Markov-Strategie* bestimmt man die Lösung von $\mathbb{E} = x^T(J + P_1 + P_2\mathbb{E})x$, wobei J eine mit Einsen gefüllte 2×2-Matrix ist.
Es gilt also:

$$\mathbb{E} = x^T \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{13}{50} \end{pmatrix} \mathbb{E} \right] x$$

Diese Gleichung hat ein Minimum von $\mathbb{E} = 2$, es wird bei $x^T = (\frac{1}{6}, \frac{5}{6})$ erreicht. Dieser Wahrscheinlichkeitsvektor entspricht einer zufälligen Wahl von zwei aus insgesamt sechs möglichen Touren. Folglich sollten bei 2-Markov-Strategien die Touren zufällig gewählt werden.

In ähnlicher Weise können die Spieler in den ersten drei t-Schritten die Touren AAA, AAB, ABA, ABB oder ABC wählen. Die Matrix für das Nichttreffen ist

$$P_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{5} & \frac{13}{50} & \frac{2}{25} & \frac{2}{25} & \frac{11}{100} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{25} & \frac{13}{50} & \frac{2}{25} & \frac{11}{100} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{25} & \frac{2}{25} & \frac{13}{50} & \frac{11}{100} \\ \frac{1}{20} & \frac{11}{100} & \frac{11}{100} & \frac{11}{100} & \frac{7}{50} \end{pmatrix}$$

und es gilt wieder $P_3 \succ 0$.

Der Wahrscheinlichkeitsvektor $x = (x_{AAA}, x_{AAB}, x_{ABA}, x_{ABB}, x_{ABC})$ ist nun so zu be-

[7] Eine quadratische symmetrische (bzw. hermitesche) Matrix ist genau dann **positiv definit**, wenn alle Eigenwerte größer als null sind.

stimmen, dass $\mathbb{E} = x^T(J + P_1 + P_2 + P_3\mathbb{E})x$ minimal wird.

Bemerkung: Die Matrizen J, P_1 und P_2 müssen auf das Format 5×5 erweitert werden:

$$\mathbb{E} = x^T \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{13}{50} & \frac{13}{50} & \frac{13}{50} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{13}{50} & \frac{13}{50} & \frac{13}{50} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{13}{50} & \frac{13}{50} & \frac{13}{50} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{5} & \frac{13}{50} & \frac{2}{25} & \frac{2}{25} & \frac{11}{100} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{25} & \frac{13}{50} & \frac{2}{25} & \frac{11}{100} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{25} & \frac{2}{25} & \frac{13}{50} & \frac{11}{100} \\ \frac{1}{20} & \frac{11}{100} & \frac{11}{100} & \frac{11}{100} & \frac{7}{50} \end{pmatrix} \mathbb{E} \right] x$$

Das Tourenmuster (wie zum Beispiel ABA) wird hierfür bei P_1 nach einem und bei P_2 nach zwei Buchstaben abgebrochen.

Der Erwartungswert besitzt in dieser Gleichung ein Minimum von $\mathbb{E} = 2$ und wird erreicht, wenn man $(x_{AAA}, x_{AAB}, x_{ABA}, x_{ABB}, x_{ABC}) = 1/36(1, 5, 5, 5, 20)$ in die Gleichung einsetzt. Dieser Wahrscheinlichkeitsvektor entspricht einer zufälligen Wahl von drei aus insgesamt sechs möglichen Touren. Folglich sollten auch bei *3-Markov-Strategien* die Touren zufällig gewählt werden.

Über vier *t-Schritte* sieht es jedoch anders aus. Es gibt nun 15 mögliche *Strategien*: $AAAA$, $AAAB$, $AABA$, $AABB$, $AABC$, $ABAA$, $ABAB$, $ABAC$, $ABBA$, $ABBB$, $ABBC$, $ABCA$, $ABCB$, $ABCC$ und $ABCD$. Die Matrix P_4 für das Nichttreffen hat einen negativen Eigenwert, deshalb lässt sich das globale Minimum von $\mathbb{E}$ schwer bestimmen. In der *AW-Strategie* würden die Touren nach dem Zufallsprinzip gewählt. Solch eine Zufallswahl ergibt folgenden Wahrscheinlichkeitsvektor x^T:

$$\begin{aligned} x^T = \quad & (p_{AAAA}, p_{AAAB}, p_{AABA}, p_{AABB}, p_{AABC}, p_{ABAA}, p_{ABAB}, p_{ABAC}, p_{ABBA}, \\ & \qquad p_{ABBB}, p_{ABBC}, p_{ABCA}, p_{ABCB}, p_{ABCC}, p_{ABCD}) \\ = \quad & \frac{1}{6^3}(1, 5, 5, 5, 20, 5, 5, 20, 5, 5, 20, 20, 20, 20, 60) \end{aligned}$$

Löst man $\mathbb{E} = x^T(J + P_1 + P_2 + P_3 + P_4\mathbb{E})x$, so findet man $\mathbb{E} = 2$, wie man es erwartet. Betrachtet man jedoch den Wahrscheinlichkeitsvektor

$$y^T = \left(0, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, 0, 0, \frac{1}{12}, 0, 0, 0\frac{1}{12}, 0, 0, 0, 0, \frac{2}{3}\right),$$

so stellt man fest, dass auch y die Gleichung $\mathbb{E} = y^T(J + P_1 + P_2 + P_3 + P_4\mathbb{E})y$ mit dem Erwartungswert $\mathbb{E} = 2 - \frac{23}{16200} \approx 1.99858$ löst. Dieser Erwartungswert stellt offensichtlich eine Verbesserung gegenüber der *AW-Strategie* dar.

Im Folgenden soll eine *Strategie* gefunden werden, die diesen verbesserten Erwartungswert erreicht. Man betrachte dazu eine *12-Markov-Strategie* bestehend aus vier *t-Schritten*. In jedem *t-Schritt* bleibt ein Spieler mit der Wahrscheinlichkeit p an seinem Heimatort und geht mit der Wahrscheinlichkeit $1-p$ auf Tour.
Wenn er mehr als zwei Touren macht, tut er dies so, dass die vom Wahrscheinlichkkeitsvektor y dargestellte Verteilung errreicht wird. Das bedeutet, die erste und die zweite Tour werden zufällig gewählt, aber die dritte und die vierte Tour werden so gewählt, dass sie mit folgender Verteilung über vier Touren übereinstimmen: $AAAB$, $AABA$, $ABAA$, $ABBB$, jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von $1/12$, und $ABCD$ mit einer Wahrscheinlichkeit von $2/3$. Wenn sich die Spieler am Ende von zwölf Schritten noch nicht getroffen haben, beginnt die *Strategie* von vorn.

Um die erwartete Begegnungszeitzeit zu berechnen, ordnet man jedem möglichen 12-Schritte-Pfad, den die *Strategie* nehmen könnte, eine Wahrscheinlichkeit zu. Es gibt 1585 mögliche Pfade, die eine Wahrscheinlichkeit ungleich null haben. Für alle 1585×1585 Pfadkombinationen, die sich aus den Bewegungen der beiden Spieler ergeben, kann man berechnen, nach wie vielen Schritten die Begegnung stattfindet, bzw. dass sie sich nach zwölf Schritten noch nicht getroffen haben. Mittelt man diese mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten, so berechnet sich die erwartete Begegnungszeit wie folgt:

$$\mathbb{E} = \frac{-227773p^8+582884p^7-1329319p^6+1737938p^5-1941235p^4+1420688p^3-998569p^2+389834p-217648}{3(82001p^8-218608p^7+327728p^6-315256p^5+215870p^4-104656p^3+36128p^2-8008p-15199)}$$

Das globale Minimum von $\mathbb{E}$ ist schwierig zu bestimmen. Es ist aber der optimale Wert der *AW-Strategie* bekannt:

$$p = \frac{1}{4}(3\sqrt{681} - 77)$$

Setzt man diesen in die obige Gleichung ein, so kann man den Erwartungswert berechnen[8]:

$$\mathbb{E} \approx 3,42451804169$$

Zum Vergleich: die *AW-Strategie* erreicht bei diesem Problem (Rendezvous-Suche an vier Orten) einen Wert von

$$\mathbb{E}_{AW} \approx 3,42466472512$$

Die Differenz d dieser Erwartungswerte beträgt:

$$d \approx 0,00014668343$$

[8]Die hier beschriebenen Berechnungen wurden mithilfe des Programmes Octave erstellt.

Diese Verbesserung ist deshalb so gering, weil die neue *Strategie* ihren Vorteil gegenüber der *AW-Strategie* nur dann nutzen kann, wenn beide Spieler mindestens vier Touren machen. Das jedoch ist nur mit einer Wahrscheinlichkeit von $(1-p)^8$ der Fall.

Hier wurde gezeigt, dass es für $n = 4$ eine bessere *Strategie* als die *AW-Strategie* gibt. Ob man die Suche in vier Räumen noch weiter optimieren kann, ist eine offene Frage. Eine Verbesserung wäre eventuell dadurch möglich, dass man ein anderes p wählt.

1.3 Mathematische und experimentelle Untersuchung

Die Rendezvous-Suche auf n Räumen eignet sich sehr gut für eine experimentelle Untersuchung. Im folgenden Experiment wird für verschieden große $n \geqslant 3$ der Räume die Abhängigkeit der erwarteten Schrittzahl bis zum Rendezvous von der Bleibewahrscheinlichkeit p dargestellt. Für große[9] n wird experimentell bestätigt, dass sich die minimierende Bleibewahrscheinlichkeit p einem Wert von etwa 0,24749 und der minimale Erwartungswert $\mathbb{E}$ der Begegnungszeit einem Wert von etwa $0,8289n$ annähert. Die mathematische Berechnung dieser beiden Werte lieferte Richard Weber 2015 [Web15].

Für $n = 4$ hat Richard Weber bereits 2009 eine Gleichung hergeleitet, durch die die erwartete Begegnungszeit aus der Bleibewahrscheinlichkeit p berechnet werden kann [Web09b].

Für $n = 5$ soll die entsprechende Gleichung an dieser Stelle hergeleitet werden:

$$\begin{aligned}\mathbb{E} &= p^2(4+\mathbb{E}) + 2p(1-p)\cdot\frac{5}{2} + (1-p)^2\left[\frac{13}{24}\cdot\frac{115}{52} + \left(1-\frac{13}{24}\right)(4+\mathbb{E})\right]\\ &= \frac{3(65p^2-34p+97)}{4(-35p^2)+22p+13)}\end{aligned}$$

Die Summanden dieser Gleichung kann man sich wie folgt erklären:

1) Wenn beide Spieler am Heimatort bleiben, treffen sie sich nicht.

2) Wenn einer der Spieler am Heimatort bleibt, während der andere Spieler seine vier Nicht-Heimatorte besucht, dann treffen sie sich in der erwarteten Zeit $\frac{5}{2}$.

3) Wenn beide Spieler ihre jeweiligen Nicht-Heimatorte besuchen, treffen sie sich mit der Wahrscheinlichkeit von $\frac{13}{24}$ und unter der Bedingung, dass sie sich treffen, treffen sie sich in der erwarteten Zeit $\frac{115}{52}$.

$\Rightarrow \mathbb{E}$ erreicht sein Minimum bei $p = \frac{8\sqrt{1135}-265}{15} \approx 0,3012$, es gilt $\mathbb{E}_{min} \approx 4,2241$.

[9] Um die Laufzeit zu begrenzen, sind im Experiment nur bis zu dreistellige n benutzt worden.

Die folgenden drei Abbildungen zeigen die Abhängigkeit der erwarteten Begegnungszeit $\mathbb{E}$ von der Bleibewahrscheinlichkeit p, die sich aufsteigend von null in Schritten von 0,01 erhöht. Die experimentell bestimmte Kurve wird durch grüne Dreiecke dargestellt.

In der Abbildung 1 wird zusätzlich die mathematisch errechnete Kurve durch rote Strecken veranschaulicht.

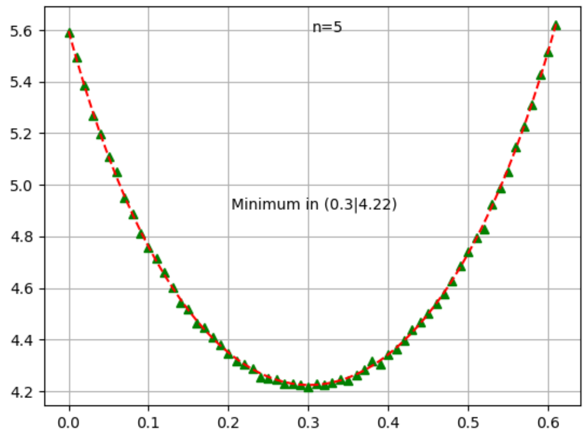

Abbildung 1.1: Anderson-Weber-Strategie für fünf Räume.

Bei fünf Räumen liegt die experimentell ermittelte optimale Bleibewahrscheinlichkeit p bei 0,30. Die erwartete Begegnungszeit für dieses p beträgt 4,22. Die Spieler machen pro Bleibewahrscheinlichkeit jeweils 200.000 Experimente aus denen die mittlere Begegnungszeit berechnet wird. Die Laufzeit des Programmes[10] betrug etwa zehn Minuten.

[10]Der verwendete Rechner ist ein einfacher Business-Laptop mit einem 2,3-GHz-Prozessor, vier Kernen, 8 GB RAM und Windows 10 Pro (64 Bit).

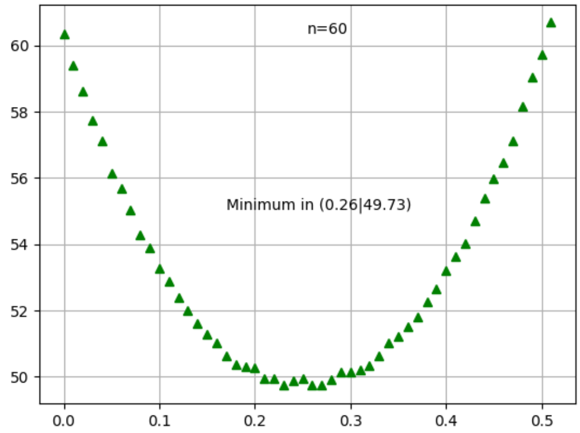

Abbildung 1.2: Anderson-Weber-Strategie für 60 Räume.

Bei sechzig Räumen liegt die experimentell ermittelte optimale Bleibewahrscheinlichkeit p bei 0,26. Die erwartete Begegnungszeit für dieses p beträgt 49,73. Für die Berechnung wurden 250.000 Experimente pro Bleibewahrscheinlichkeit gemacht, die Laufzeit dafür lag bei etwa eineinhalb Stunden.

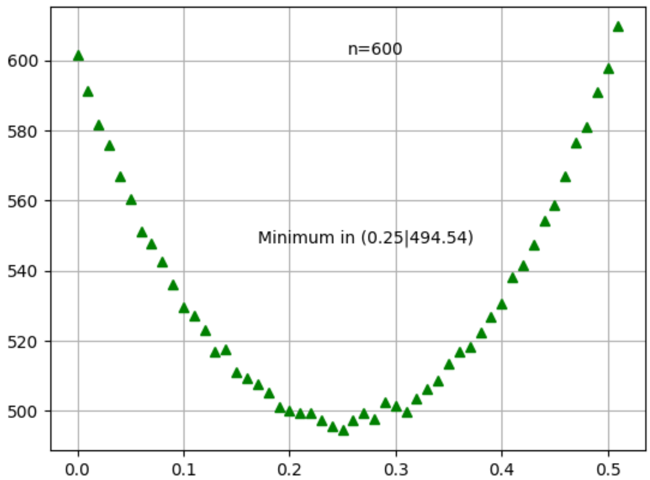

Abbildung 1.3: Anderson-Weber-Strategie für 600 Räume.

Bei 600 Räumen liegt die experimentell ermittelte optimale Bleibewahrscheinlichkeit p bei 0,25. Die erwartete Begegnungszeit für dieses p beträgt 494,54. Man sieht hier eine größere Streuung als bei den vorangegangenen Experimenten. Es wurden 150.000 Experimente für jede Bleibewahrscheinlichkeit gemacht, die Laufzeit betrug etwa sieben Stunden.

2 Symmetrische Rendezvous-Suche auf der Linie

2.1 Einführung

Zwei Spieler werden zufällig mit einem Abstand von zwei Einheiten auf einer Linie platziert. Pro Zeiteinheit bewegen sich beide Spieler jeweils einen Schritt vorwärts oder rückwärts. Wie sollen die Spieler vorgehen, um sich möglichst schnell zu treffen? Gibt es eine optimale *Strategie*, also eine Reihenfolge von Schritten, die zu einer möglichst kurzen Treffzeit führt?

Angenommen, jeder der Spieler verfolgt die *Strategie* „Ich gehe einen Schritt vorwärts und zwei Schritte rückwärts.“ In diesem Beispiel wird ein Paket aus drei Schritten gebildet und bis zum Erfolg wiederholt angewendet. Das Paket (vorwärts, rückwärts, rückwärts) kann man auch als (1, -1, -1) schreiben. Die Spieler wissen nicht, wo vorwärts bzw. rückwärts ist und bestimmen ihr „vorwärts“ per Zufall. Das bedeutet, dass man (-1, 1, 1) nicht betrachten muss, weil es das zu (1, -1, -1) gespiegelte Muster beschreibt. Ein Paket aus drei Einzelschritten wird als 3-Generator und allgemein ein Paket aus n Einzelschritten als n-Generator bezeichnet.
Ein n-Generator ist also ein Wort der Länge n über der Alphabetmenge {1, -1}, wobei der erste Buchstabe 1 ist. Es sei $\mathcal{G}_n$ die Menge aller n-Generatoren. Offensichtlich ist $|\mathcal{G}_n| = 2^{n-1}$.

Bei der symmetrischen Rendezvous-Suche müssen beide Spieler die gleiche *Strategie* nutzen. Bei der asymmetrischen Rendezvous-Suche dürfen beide Spieler unterschiedliche *Strategien* verwenden. Die Aufgabe besteht darin, *Strategien* für beide Spieler anzugeben, um sich in der kürzestmöglichen erwarteten Zeit zu treffen. Die Zeit, die die Spieler bei optimalem Vorgehen benötigen, bezeichnet man als Rendezvous-Wert. Seien R^s und R^a die Rendevouz-Werte für das symmetrische bzw. asymmetrische Problem.
Offensichtlich ist $R^s \geqslant R^a$, denn beide Spieler können auch beim asymmetrischen Problem die gleiche *Strategie* wählen.
Alpern und Gal haben 1995 gezeigt, dass der asymmetrische Rendezvous-Wert $R^a = 3,25$ beträgt [AG95]. Weiter unten wird eine *Strategie* angegeben, mit der dieser Wert erreicht wird. Die Frage nach dem symmetrischen Rendezvous-Wert R^s wurde von Alpern im Jahr 1995 aufgestellt, diese Frage ist bis heute unbeantwortet.

2.2 Markov-Strategie

Benutzen beide Spieler den gleichen n-Generator, werden sie mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/2 alle n Schritte parallel zueinander laufen, ihr Abstand nach diesen n Schritten beträgt dann noch immer zwei. Würden die Spieler verschiedene n-Generatoren nutzen, so würde sich eine Asymmetrie ergeben, die zu einer kürzeren erwarteten Begegnungszeit führen kann. Eine solche Asymmetrie kann in der symmetrischen Aufgabenstellung durch eine zufällige Wahl aus einer Menge verschiedener n-Generatoren erreicht werden.

So gilt zum Beispiel bei der Verwendung zweier unterschiedlicher n-Generatoren: Wenn beide Spieler den ersten n-Generator mit der Wahrscheinlichkeit p wählen, so werden mit der Wahrscheinlichkeit von $2p(1-p)$ zwei verschiedene n-Generatoren für beide Spieler ausgelost. Diese Idee führt zu folgenden Definitionen:

1) Sei $\mathcal{I}_k = \{1, 2, ..., k\}$ eine Indexmenge für eine beliebige gegebene natürliche Zahl k. Ein Vektor $x = (x_i)_{i \in \mathcal{I}_k}$ ist ein *Wahrscheinlichkeitsvektor*, wenn er die Bedingungen $x_i \geqslant 0, \forall i \in \mathcal{I}_k$ und $e^T x = 1$ erfüllt, wobei e der Vektor aller Einsen ist.

2) Ordnet man jedem n-Generator $g_i,\ i = 1, ..., k$ einer Menge $\mathcal{G}_n,\ |\mathcal{G}_n| = k$ eine Wahrscheinlichkeit x_i zu, und sei $x = (x_i)_{i \in \mathcal{I}_k}$ ein *Wahrscheinlichkeitsvektor*, so erhält man einen sogenannten *gemischten* n-Generator.

Ein *gemischter* n-Generator bedeutet also, mit der Wahrscheinlichkeit x_i den n-Generator g_i zu verwenden. Die Menge der *gemischten* n-Generatoren wird als $\mathcal{G}_n^*$ bezeichnet.

Gegeben sei ein *gemischter* n-Generator $x \in \mathcal{G}_n^*$, dann versteht man unter der **n-Markov-Strategie** die Wiederholung des *gemischten* n-Generators x alle n Zeiteinheiten, bis ein Rendezvous stattfindet.

Wie stellt man sicher, dass sich die beiden Spieler nicht immer weiter voneinander entfernen? Der Erwartungswert der Begegnungszeit wäre dann unendlich.

Es gibt Schrittfolgen, bei denen sich die Spieler entweder begegnen oder ihr Abstand nicht größer als ihr Anfangsabstand wird. Ein Beispiel für eine solche Schrittfolge ist die bereits erwähnte Reihenfolge (vorwärts, rückwärts, rückwärts). Unter den 3-*Markov-Strategien* ist das sogar die einzige *Strategie*, bei der sich die Entfernung zwischen den Spielern nicht vergrößern kann.

Bei der Verwendung eines *gemischten* n-Generators ist es möglich, dass beide Spieler unterschiedliche (reine) n-Generatoren benutzen. Auch in diesem Fall möchte man, dass sich die Entfernung zwischen den Spielern nicht vergrößert.

Es werden folgende Bezeichnungen eingeführt:

- Zwei n-Generatoren $g_1, g_2 \in \mathcal{G}_n$ werden als *entfernungserhaltend* bezeichnet ($g_1 \sim g_2$), wenn ihr Abstand zueinander entweder null wird oder unverändert bleibt, nachdem ein Spieler dem Generator g_1 und der andere Spieler dem Generator g_2 für n Zeiteinheiten gefolgt ist.

- Ein *gemischter* n-Generator $x \in \mathcal{G}_n^*$ wird als *abstandserhaltend* bezeichnet, wenn $x_i x_j = 0$ für $g_i \nsim g_j$ für alle $i, j \in \mathcal{I}_{2^{n-1}}$.

Zu beachten ist, dass die Forderung an den *gemischten abstandserhaltenden* n-Generator stärker ist als die Forderung, dass jeder einzelne seiner n-Generatoren für sich genommen *entfernungserhaltend* ist. Qiaoming Han, Donglei Du et al. haben 2008 das folgende Theorem bewiesen [Han+08]:

Theorem 3. *Für jede gegebene positive ganze Zahl n ist die erwartete Begegnungszeitszeit der n-Markov-Strategie unendlich, wenn der gemischte n-Generator, der in dieser Strategie verwendet wird, nicht abstandserhaltend ist.*

In den folgenden Berechnungen werden deshalb nur *abstandserhaltende gemischte* n-Generatoren berücksichtigt.

2.3 Analyse der Markov-Strategie

Sei $x \in \mathcal{G}_n^*$ ein *abstandserhaltender gemischter* n-Generator, der in der *n-Markov-Strategie* verwendet wird, so dass $\mathcal{G}_n = \{g_1, ..., g_{2^{n-1}}\}$ und $x = (x_1, ..., x_{2^{n-1}})$ gilt.
Der Einfachheit halber nimmt man an, dass die Kardinalität von $\mathcal{G}_n$ noch immer 2^{n-1} beträgt, denn die Reduktion auf *abstandserhaltende gemischte* n-Generatoren ist gleichbedeutend mit dem Setzen von Nullen für die Wahrscheinlichkeiten der ausgeschlossenen Generatoren.

Man betrachte zwei n-Generatoren $g_i, g_j \in \mathcal{G}_n$ so, dass ein Spieler g_i und ein anderer g_j für n Zeiteinheiten folgt. Es werden folgende Bezeichnungen eingeführt:

1) Sei p_{ij} die Wahrscheinlichkeit, dass der Abstand der Spieler zum Zeitpunkt n unverändert zwei Einheiten beträgt. Mit dieser Wahrscheinlichkeit war der n-Schritt erfolglos und die Spieler befinden sich in der gleichen Situation wie zu Beginn,
2) sei die Matrix $P_n = (p_{ij}) \in \mathbb{R}^{2^{n-1} \times 2^{n-1}}$,
3) sei T_{ij} der Zeitpunkt ihrer Begegnung,
4) sei $T_{ij}^{(n)} = \min\{T_{ij}, n\}$,
5) sei $m_{ij} = \mathbb{E}[T_{ij}^{(n)}]$ die erwartete Schrittzahl,
6) sei die Matrix $M_n = (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{2^{n-1} \times 2^{n-1}}$,
7) sei $T(x)$ die erwartete Begegnungszeit der *gemischten n-Markov-Strategie* unter Verwendung von x als *gemischtem* n-Generator.

Für die Bestimmung von $T(x)$ erhält man Gleichung:

$$T(x) = x^T M_n x + T(x) x^T P_n x \tag{2.1}$$

mit $x_i x_j = 0$ wenn $g_i \nsim g_j$ und $i, j \in \mathcal{I}_{2^n}$.

Der erste Summand steht für den Erfolgsfall (die Spieler sind sich begegnet) und der zweite Summand für den Fall ihres Misserfolgs.

Äquivalent zur Gleichung (2.1) ist die Gleichung

$$T(x) = \frac{x^T M_n x}{1 - x^T P_n x} \tag{2.2}$$

In der Gleichung (2.2) ist der Wahrscheinlichkeitsvektor x zu optimieren, und zwar so dass $T(x)$ minimal wird:

$$R_n^s \;=\; \min\left\{\frac{x^T M_n x}{1 - x^T P_n x} : x_i x_j = 0, \forall g_i \nsim g_j, i,j \in \mathcal{I}_{2^{n-1}}, e^T x = 1, x \geqslant 0\right\}$$

Für jedes feste n ist R_n^s die engste obere Schranke. Allerdings ist das Finden von R_n^s schwierig, wenn n groß ist.

Beispiele:

$R_3^s = 5$ In diesem Fall gibt es vier Generatoren: $g_1 = (1,1,1)$, $g_2 = (1,1,-1)$, $g_3 = (1,-1,1)$, $g_4 = (1,-1,-1)$. Aber g_4 ist der einzige *entfernungserhaltende* Generator. Dadurch lässt sich R_3^s leicht ausrechnen: Man setzt einfach $M_3 = \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 3 + \frac{1}{2}\cdot 3 = \frac{5}{2}$ und $P_3 = \frac{1}{2}$ in die Gleichung (2.2) ein.

$R_4^s \approx 5,9441$ Dieses Beispiel wird hier etwas ausführlicher gerechnet, denn Qiaoming Han, Donglei Du et al. sind 2008 zu einem anderen Ergebnis (nämlich zu $R_4^s \approx 4,9441$) gekommen [Han+08]. Die beiden Generatoren $g_1 = (1,1,-1,-1)$ und $g_2 = (1,-1,-1,1)$ werden als einzige Generatoren des optimalen *gemischten* 4-Generators angegeben. Sei $\mathbb{E}_{i,j}$ mit $i,j \in \{1,2\}$ die erwartete Begegnungszeit, wenn einer der Spieler den Generator g_i und der andere Spieler den Generator g_j nutzt. Man errechnet folgende Werte:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{1,1} &= \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{3}{4}(\mathbb{E}_{1,1}+4) \Rightarrow \mathbb{E}_{1,1} = 13\\
\mathbb{E}_{1,2} = \mathbb{E}_{2,1} &= \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{2}(\mathbb{E}_{1,2}+4) \Rightarrow \mathbb{E}_{1,2} = \mathbb{E}_{2,1} = 5,5\\
\mathbb{E}_{2,2} &= \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 3 + \frac{1}{2}(\mathbb{E}_{2,2}+4) \Rightarrow \mathbb{E}_{2,2} = 6.
\end{aligned}$$

Schaut man sich die Erwartungswerte $\mathbb{E}_{i,j}$ an, so vermutet man ein R_4^s, das zwischen 5,5 und 6 liegt. Um die Gleichung (2.2) zu benutzen, rechnet man noch die Matrizen M und P aus:

$$\begin{aligned}
m_{1,1} &= \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{3}{4}\cdot 4 = \frac{13}{4}\\
m_{1,2} = m_{2,1} &= \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 4 = \frac{11}{4}\\
m_{2,2} &= \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 3 + \frac{1}{2}\cdot 4 = 3 = \frac{12}{4}
\end{aligned}$$

Zum Beispiel errechnet man das Matrixelement $m_{2,2}$ auf folgende Weise: Mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/4 gehen die Spieler einen Schritt, mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/4 gehen die Spieler drei Schritte und mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/2 gehen sie mindestens vier Schritte. Die erwartete Zahl von Schritten eines Durchgangs (mit maximal vier Schritten) beträgt also $\frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 4 = 3$, deswegen ist $m_{2,2} = 3$.
Mit der Wahrscheinlichkeit $p_{2,2} = \frac{1}{2}$ haben sich die Spieler nicht gefunden und die ganze Prozedur wiederholt sich im nächsten 4-Schritt.

Setzt man

$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 13 & 11 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}, \qquad P = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

und den Wahrscheinlichkeitsvektor $x = \begin{pmatrix} p \\ 1-p \end{pmatrix}$ in die Gleichung (2.2) ein, so errechnet man die erwartete Begegnungszeit

$$T(x) = \frac{3p^2 - 2p + 12}{2 - p^2}$$

Das Minimum von $T(x)$ wird bei $p = 9 - \sqrt{79} \approx 0,1118$ erreicht. Damit ist

$$x = \begin{pmatrix} 9 - \sqrt{79} \\ \sqrt{79} - 8 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,1118 \\ 0,8882 \end{pmatrix}$$

der Wahrscheinlichkeitsvektor, der Gleichung (2.2) minimiert.

$\Rightarrow$ Es ergibt sich der Rendezvous-Wert $R_4^s = \frac{237+79\sqrt{79}}{158} \approx 5,9441$.

$R_6^s \approx 4,4634$ Der optimale *gemischte* 6-Generator besteht aus den folgenden fünf Generatoren mit ihren Wahrscheinlichkeitswerten:

$$\begin{aligned}
g_1 &= (1, -1, -1, -1, 1, 1), & x_1 &\approx 0,2482 \\
g_2 &= (1, -1, -1, 1, -1, 1), & x_2 &\approx 0,1561 \\
g_3 &= (1, -1, -1, 1, 1, -1), & x_1 &\approx 0,1561 \\
g_4 &= (1, -1, 1, -1, -1, -1), & x_2 &\approx 0,1867 \\
g_5 &= (1, 1, -1, -1, -1, -1), & x_2 &\approx 0,2529
\end{aligned}$$

Im asymmetrischen Fall könnte einer der Spieler den Generator g_1 und der andere Spieler den Generator g_5 benutzen, die Spieler würden sich dann spätestens nach dem sechsten Schritt getroffen haben. Der Erwartungswert beträgt in diesem Fall:

$$\mathbb{E}_{15} = \mathbb{E}_{51} = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 6 \quad \Rightarrow \mathbb{E}_{15} = \mathbb{E}_{51} = 3,25$$

Dies entspricht genau dem von Alpern und Gal 1995 in [AG95] angegebenen Rendezvous-Wert R^a für den asymmetrischen Fall.

Wait-for-mommy auf der Linie

Bei der symmetrischen Rendezvous-Suche auf der Linie wurde von Qiaoming Han, Donglei Du et al. vorausgesetzt, dass beide Spieler zu jeder Zeiteinheit einen Schritt ausführen [Han+08]. Was passiert jedoch, wenn auch das Warten erlaubt ist? Im asymmetrischen Fall könnte einer der Spieler einfach sechs Zeiteinheiten warten, während der andere Spieler beispielsweise den 6-Generator $(1, 1, -1, -1, -1, -1)$ für die Suche nutzt. Die erwartete Zahl der Schritte bis zur Begegnung beträgt in diesem Fall vier.

Im symmetrischen Fall wird jeder der beiden Spieler mit der Wahrscheinlichkeit p auf seiner Ausgangsposition warten und mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p$ seinen Partner suchen. Angenommen, der suchende Spieler benutzt den oben genannten 6-Generator, dann errechnet man für die erwartete Begegnungszeit

$$\mathbb{E} = p^2(\mathbb{E} + 6) + 2p(1 - p) \left(\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 6\right) + (1 - p)^2 \left[\frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 5 + \frac{1}{2}(\mathbb{E} + 6)\right] \qquad (2.3)$$

1) Wenn beide Spieler warten, verstreichen sechs Zeiteinheiten ungenutzt.

2) Wenn ein Spieler wartet und der andere Spieler sucht, dann geht der suchende Spieler mit der Wahrscheinlichkeit von 1/2 auf dem kürzesten Weg auf den wartenden Spieler zu; mit der Wahrscheinlichkeit von 1/2 entfernt er sich jedoch anfangs von seinem Partner und trifft ihn erst im sechsten Schritt.

3) Wenn sich beide Spieler gegenseitig suchen, dann gehen sie mit der Wahrscheinlichkeit von 1/4 direkt aufeinander zu (und treffen sich nach einem Schritt), mit der Wahrscheinlichkeit von 1/4 entfernen sie sich anfangs voneinander (und treffen sich nach dem fünften Schritt), mit der Wahrscheinlichkeit von 1/2 bewegen sie sich parallel zueinander.

Die Gleichung (2.3) hat die Lösung

$$\mathbb{E} = \frac{5p^2 - 2p + 9}{-3p^2 + 2p + 1}$$

Erwartungsgemäß hat $\mathbb{E}$ bei $p = 1$ eine Polstelle. Das Minimum von $\mathbb{E}$ wird bei $p = \sqrt{69} - 8 \approx 0,3066$ erreicht, man errechnet
$\mathbb{E}_{\min} = \frac{\sqrt{69}+5}{2} \approx 6,6533$. Aus dieser *Strategie* ergibt sich offenbar kein Vorteil.

Qiaoming Han, Donglei Du et al. formulierten 2008 die Vermutung, dass sich R_n^s für wachsende n dem Wert 4,25 annähert [Han+08], der Beweis steht allerdings noch aus.

2.4 Untere Schranke

Da der asymmetrische Rendezvous-Wert R^a höchstens so groß wie der symmetrische Rendezvous-Wert R^s ist (siehe Einführung dieses Kapitels), ist R^a eine untere Schranke des symmetrischen Rendezvous-Problems. Für das asymmetrische Problem wurde eine *Strategie* der Spieler vorgestellt, die zu einer erwarteten Begegnungszeit von 3,25 führt. Zu untersuchen ist, ob im asymmetrischen Problem eine *Strategie* der Spieler existiert, die zu einer kleineren erwarteten Begegnungszeit führt. Dabei sind auch nicht-abstandserhaltende *Strategien* erlaubt.

Man stellt durch Probieren sämtlicher aus sechs Schritten bestehenden *Strategien* fest, dass es keine *Strategie* mit weniger als sechs Schritten gibt, bei der sich die Spieler (unabhängig von der Wahl ihrer jeweiligen Vorwärtsrichtung) mit Sicherheit begegnen. Solche *Strategien* findet man erst ab einer Länge von sechs Schritten. Bei zwei aus je sechs Schritten bestehenden *Strategien* begegnen sich die Spieler in der erwarteten Zeit von 3,25.
In der ersten *Strategie* wählt einer der Spieler die Schrittfolge (1, 1, -1, -1, -1, -1) und der andere Spieler die Schrittfolge (1, -1 -1, -1, 1, 1), diese *Strategie* wurde im Kapitel 2.3 erwähnt. In der zweiten *Strategie* wählt einer der Spieler die Schrittfolge (1, 1, -1, -1, -1, -1) und der andere Spieler die Schrittfolge (1, -1, 1, 1, -1, -1).

Wählen beide Spieler *Strategien* mit mehr als sechs Schritten, so kann man eine untere Schranke ihrer Begegnungszeit durch eine Abschätzung mit Hilfe einer idealisierten *Strategie* gewinnen:
Beide Spieler sind sich während ihrer ersten sechs Schritte entweder begegnet, oder sie haben nach dem sechsten Schritt den positiven Abstand d. Im zweiten Fall gehen die Spieler direkt aufeinander zu (idealisierte *Strategie*), die Zahl ihrer zusätzlichen Schritte beträgt also $d/2$[1].

Es ist offensichtlich, dass sich diese idealisierte *Strategie* durch keine reale *Strategie* verbessern lässt. Das Computerexperiment (siehe Anhang) zeigt, dass die auf diese Weise ermittelte untere Schranke des asymmetrischen Problems bei 3,25 liegt. Daher ist der Wert 3,25 auch eine untere Schranke des symmetrischen Problems.

Qiaoming Han, Donglei Du et al. stellten für das symmetrische Problem ebenfalls eine idealisierte *Strategie* vor [Han+08]:

[1] Der Wert $d/2$ ergibt sich aus der Tatsache, dass beide Spieler pro Zeiteinheit aufeinander zugehen. Schritt ist hier also quasi als Zeiteinheit zu verstehen.

Pseudo-Strategie$_n$: Die Spieler folgen zuerst für n Schritte einer gemeinsamen *gemischten Strategie* und haben nun den Abstand d. Wenn das Rendezvous noch nicht stattgefunden hat (also $d > 0$ gilt), dann

Fall 1: bewegen sie sich von nun an direkt aufeinander zu, wenn sie nicht der gleichen *Strategie* oder wenn sie der gleichen *Strategie* in entgegengesetzte Richtungen gefolgt waren;

Fall 2: nehmen sie von nun an die optimale *gemischte Strategie* für die symmetrische Rendezvous-Suche, wenn sie der gleichen *Strategie* in dieselbe Richtung gefolgt waren (und deshalb ihr Abstand noch immer zwei beträgt).

Man kann sich vorstellen, die Spieler würden in der *Pseudo-Strategie$_n$* nach den ersten n Schritten einen Tipp bekommen und deshalb über mehr Informationen als zu Beginn ihrer Suche verfügen. Insbesondere verfügen sie über mehr Informationen als Spieler bei der normalen (nicht idealisierten) Rendezvous-Suche. Die erwartete Begegnungszeit der Pseudo-Strategie$_n$ ist daher eine untere Schranke der symmetrischen Suche auf der Linie. Qiaoming Han, Donglei Du et al. haben eine Gleichung für die erwartete Begegnungszeit r_n^s der *Pseudo-Strategie$_n$* hergeleitet und für $1 \leqslant n \leqslant 7$ die unteren Schranken r_n^s angegeben [Han+08]. In diesem Intervall wächst r_n^s streng monoton und es ist $r_7^s \approx 4,1520$. Für größere n ist die Berechnung der unteren Schranke sehr schwierig. Die numerische Methode stößt an ihre Grenzen und die mathematische Untersuchung ist noch immer nicht abgeschlossen.

3 Weitere interessante Rendezvous-Probleme

Die folgenden Probleme hat Steve Alpern 2013 im Buch *Search Theory: A Game Theoretic Perspective* im Kapitel 14 „Ten Open Problems in Rendezvous Search" beschrieben [Alp+13].

3.1 Rendezvous-Suche auf einem Kreis

Zwei Spieler werden per Zufall auf Punkten eines Kreises platziert. Sie haben keine gemeinsame Vorstellung vom Uhrzeigersinn und müssen die gleiche Strategie anwenden. Der Kreis habe den Umfang eins und die Spieler sollen sich stets mit der Geschwindigkeit eins bewegen.
Wie können sie die erwartete Zeit bis zur Begegnung minimieren?

Folgende Lösung wurde 1973 von Steve Alpern in seiner Dissertation veröffentlicht, sie ist auch bei Richard Weber 2015 [Web15] zu finden:
Jeder Spieler wirft eine Münze und wählt eine Richtung, um den halben Kreis zu umrunden. Diesen Vorgang wiederholt er bis die Begegnung stattfindet.
Angenommen, die Spieler beginnen mit dem Abstand x und die erwartete Zeit bis zum Zusammentreffen ist T_x. Dann gilt:

$$T_x = \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1-x}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + T_x\right) \Rightarrow T_x = \frac{3}{4}$$

Die erwartete Begegnungszeit ist also 3/4.

3.2 Astronautenproblem

Zwei Astronauten landen gleichzeitig auf verschiedenen Orten eines Planeten. Sie laufen mit der gleichen Geschwindigkeit und können sich erst dann gegenseitig wahrnehmen, wenn sie einen bestimmten Höchstabstand zueinander haben. Was ist die kürzeste erwartete Begegnungszeit, die sie garantieren können? Wie sollen sie vorgehen, um diese Zeit zu erreichen?

3.3 Rendezvous mit mehreren Spielern

Die Rendezvous-Probleme können so modifiziert werden, dass das Ziel darin besteht, dass sich n Spieler am selben Ort treffen. Zum Beispiel könnten n Astronauten zufällig verteilt auf einem Planeten landen und sich suchen. Oder es werden m Spieler per Zufall auf n Räume verteilt und müssen sich in einem der Räume versammeln.

4 Anhang

4.1 Quellcode der Python-Programme

Hier folgt der Code zu dem Python-Programm, mitdessen Hilfe die Grafiken für das Kapitel 1.3 *Mathematische und experimentelle Untersuchung* erstellt wurden.

```python
import random
import matplotlib.pyplot as plt
raumzahl = 5
a = list(range(raumzahl))
b = list(range(raumzahl))
c = list(range(raumzahl))
raumstring = str(raumzahl)
minerwartung = raumzahl
versuchzahl = 200000
personA = list(range(2))
personB = list(range(2))
abzisse = []
endabzisse = 0
ordinate = []
funktion = []
wahrscheinlichkeiten = 100
optbleibewahrsch = 0
etbeginn = 0
"""
Bei "suchen" begeben sich beide Personen auf die Suche. Bei "alaufen" und "blaufen" sucht eine Person während die andere Person in ihrem Raum wartet:
"""
def suchen(time, alaufen, blaufen):
    if alaufen and blaufen:
        i = 0
        while True:
            time += 1
            if a[i] == b[i]:
                return (time, True)
            if i < len(a) - 1:
                i += 1
            else:
                return (time, False)
    if alaufen and (not blaufen):
```

```
        i = 0
        while True:
            time += 1
            if a[i] == personB[0]:
                return (time, True)
            if i < len(a) - 1:
                i += 1
            else:
                return (time, False)
    if blaufen and (not alaufen):
        i = 0
        while True:
            time += 1
            if b[i] == personA[0]:
                return (time, True)
            if i < len(b) - 1:
                i += 1
            else:
                return (time, False)
    if (not alaufen) and (not blaufen):
        time += len(a)
        return (time, False)
"""
Die Person wartet mit der Wahrscheinlichkeit p in ihrem Raum: warte(p) gibt True zurück
mit der Wahrscheinlichkeit 1-p sucht sie die anderen Räume ab: warte(p) gibt False zurück:
"""
def warte(p):
    return p > random.random()
"""
Initialisierung:
Jeder Person wird ein zufällig gewählter Raum zugewiesen, die Personen befinden sich in verschiedenen Räumen.
In der Liste a befinden sich die Räume, in denen die Person A nicht ist, in der Liste b befinden sich die Räume, in denen die Person B nicht ist:
"""
random.shuffle(c)
personA[0] = (c[0])
personB[0] = (c[1])
a.remove(personA[0])
b.remove(personB[0])
# Ende der Initialisierung
gesamtzeit = 0
maxtime = 0
anfangswahrscheinlichkeit = 0
letztewahrscheinlichkeit = (wahrscheinlichkeiten * 13) // 20
```

```
iterieren = True
i = 0
"""
In Schritten der Länge 1/"wahrscheinlichkeiten" machen die Spieler jeweils "versuchszahl" viele Experimente:
"""
while iterieren:
    abzisse.append(i / wahrscheinlichkeiten)
    gesamtzeit = 0
    maxtime = 0
    for ii in range(versuchzahl):
        time = 0
        erfolg = False
        while not erfolg:
            random.shuffle(a)
            random.shuffle(b)
            # true: die Person A sucht die Räume ab
            personA[1] = not warte(abzisse[i])
            # true: die Person B sucht die Räume ab
            personB[1] = not warte(abzisse[i])
            time, erfolg = suchen(time, personA[1], personB[1])
        if time > maxtime:
            maxtime = time
        gesamtzeit += time
    et = gesamtzeit / versuchzahl
    if et < minerwartung:
        minerwartung = et
        optbleibewahrsch = abzisse[i]
    if i == 0:
        etbeginn = et
    """
    Für 3<=raumzahl<=5 wird auch die mathematisch errechnete Kurve dargestellt:
    """
    if raumzahl == 3:
        funktion.append((7 - 2 * abzisse[i] + 3 * abzisse[i] * abzisse[i]) / (
                        2 * (1 + 2 * abzisse[i] - 3 * abzisse[i] * abzisse[i])))
    if raumzahl == 4:
        funktion.append((43 - 14 * abzisse[i] + 25 * abzisse[i] * abzisse[i]) / (
                        9 * (1 + 2 * abzisse[i] - 3 * abzisse[i] * abzisse[i])))
    if raumzahl == 5:
        funktion.append(3 * (97 - 34 * abzisse[i] + 65 * abzisse[i] * abzisse[i]) / (
```

```
                    4 * (13 + 22 * abzisse[i] - 35 * abzisse[i] * abzisse[i]))
    if (i > 0) and (et > etbeginn):
        iterieren = False
        endabzisse = abzisse[i]
    if len(funktion) > 0:
        print("Bleibewahrscheinlichkeit: ", abzisse[i], "Erwartungswert: ", et, "theoretisch: ", funktion[-1],
              "Differenz: ", et - funktion[-1], "maximale Zeit: ", maxtime)
    else:
        print("Bleibewahrscheinlichkeit: ", abzisse[i], "Erwartungswert: ", et, "maximale Zeit: ", maxtime)
    ordinate.append(et)
    i += 1
roundminerwartung = round(minerwartung, 2)
strminerw = str(roundminerwartung)
stroptbleibe = str(optbleibewahrsch)
plt.plot(abzisse, ordinate, 'g^')
if (raumzahl == 3) or (raumzahl == 4) or (raumzahl == 5):
    plt.plot(abzisse, funktion, 'r--')
# Diagramm-Gitter einblenden:
plt.grid(True)
# Diagramm ausgeben:
plt.text(endabzisse / 2, ordinate[0], "n=" + raumstring)
plt.text(endabzisse / 3, ((ordinate[0] + minerwartung) / 2), "Minimum in " + "(" + stroptbleibe + "|" + strminerw + ")")
plt.show()
```

Und an dieser Stelle wird der Quellcode des Python-Programms präsentiert, mit dem die untere Schranke in Kapitel 2.4 *Untere Schranke* bestätigt wurde.

```python
opt = 20
generator1 = []
generator2 = []
def erwausrechnen(erwartungswert, opt):
    maxtreffpunkt = 0
    for s in [-1, 1]:
        for t in [-1, 1]:
            spieler1 = 0
            spieler2 = 2
            i = 0
            """
            Für jede Wahl der Vorwärtsrichtungen beider Spieler wird die Zahl der Schritte bis zur Begegnung bestimmt:
            """
            while i < len(generator1):
                spieler1 = spieler1 + s * generator1[i]
                spieler2 = spieler2 + t * generator2[i]
                if spieler1 == spieler2:
                    treffpunkt = i + 1
                    if maxtreffpunkt < treffpunkt:
                        maxtreffpunkt = treffpunkt
                    erwartungswert = erwartungswert + treffpunkt / 4
                    i = len(generator1)
                i += 1
                """
                Wenn sich die Spieler während der ersten sechs Schritte nicht getroffen haben, dann benötigt die idealisierte Strategie noch halb so viele Schritte, wie der Abstand zwischen den Spielern beträgt:
                """
                if i == len(generator1):
                    halberabstand = (spieler2 - spieler1) // 2
                    erwartungswert = erwartungswert + (6 + halberabstand) / 4
                    if maxtreffpunkt < 6 + halberabstand:
                        maxtreffpunkt = 6 + halberabstand
    if (erwartungswert <= opt) or (maxtreffpunkt < 6):
        opt = erwartungswert
        print("Maxtreffpunkt: ", maxtreffpunkt)
        print("Erwartungswert: ", erwartungswert)
        print("Generator1: ", generator1)
        print("Generator2: ", generator2)
        print()
    return (erwartungswert, opt)
"""
```

```
Jedem der Spieler werden Schrittfolgen der Länge sechs zugeordnet.
"""
for a in range(32, 64):
    gen1 = format(a, '#010b')
    for b in range(a, 64):
        gen2 = format(b, '#010b')
        for ii in range(4, 10):
            if gen1[ii] == "1":
                generator1.append(1)
            else:
                generator1.append(-1)
        for ii in range(4, 10):
            if gen2[ii] == "1":
                generator2.append(1)
            else:
                generator2.append(-1)
        [erwartungswert, opt] = erwausrechnen(0, opt)
        del generator2[:]
        del generator1[:]
```

4.2 Literaturverzeichnis

[AG95] S. Alpern und S. Gal. *The rendezvous search problem on the line with distinguishable players*. en. 1995.

[Alp+13] Steve Alpern, Robbert Fokkink, Leszek Gąsieniec, Roy Lindelauf und V.S. Subrahmanian. *Search Theory: A Game Theoretic Perspective*. Steve Alpern u. a., 2013. ISBN: 978-1-4614-6824-0.

[AW90] E. J. Anderson und R. R. Weber. *The rendezvous problem on discrete location*. en. 1990.

[Han+08] Qiaoming Han, Donglei Du, Juan Vera und Kuis F. Zuluaga. *Improved bounds for the symmetric rendezvous value on the line*. en. 2008.

[Web09a] Richard Weber. *Optimal Symmetric Rendezvous Search on Three Locations*. en. 4. Dez. 2009.

[Web09b] Richard Weber. *The Anderson-Weber strategy is not optimal for symmetric rendezvous search on K_4*. en. 8. Juli 2009.

[Web15] Richard Weber. *Search Games Symmetric Rendezvous Search*. en. 18. Feb. 2015.