STUDIEN

Effiziente Algorithmen

für Studenten der Mathematik und Informatik
an der Freien Universität Berlin

Semesterheft Sommer 2005

SCHWERPUNKT

Allgemeines

Das Gebiet *Effiziente Algorithmen* ist eines der Bindeglieder zwischen Informatik und Mathematik. Einerseits gehören Algorithmen und Datenstrukturen zum Kern der praktischen Informatik, andererseits bezieht die zugrundeliegende Theorie ihre Methoden im wesentlichen aus der diskreten Mathematik. Die Anwendungen reichen in zahlreiche Gebiete wie Computer–Grafik, Mustererkennung, Robotik, Computer Aided Design, Bioinformatik, Kartographie, Bildverarbeitung usw. Einige konkrete Beispiele werden anhand von Diplomarbeiten, Dissertationen und Projekten am Ende dieser Broschüre vorgestellt.

Das Gebiet ist in Berlin an allen drei Universitäten und am Konrad-Zuse-Zentrum stark vertreten. Diese Institutionen tragen gemeinsam das von der Deutschen Forschungsgemeinschaft geförderte Europäische Graduiertenkolleg *Combinatorics, Geometry, and Computation*, das in Zusammenarbeit mit der ETH Zürich durchgeführt wird. (Siehe auch die WWW-Seite:
`http://www.inf.fu-berlin.de/gk-cgc`.)
Neben zahlreichen Lehrveranstaltungen werden auch andere Möglichkeiten zur Weiterbildung angeboten. So finden zum Beispiel der Berliner Algorithmen-Tag oder mehrtägige Spezialschulen regelmäßig statt.

Der Studienschwerpunkt ist ein Vorschlag zur Vertiefung in dieses Fachgebiet im Rahmen der Studiengänge Mathematik und Informatik an der Freien Universität. Zum Beispiel wird eine abgestimmte Folge von Lehrveranstaltungen von den Grundlagen bis zu den Anwendungen angeboten. Darüberhinaus sollen den Studenten die zahlreichen Angebote in dieser Richtung in Berlin besser zugänglich gemacht werden. Dazu wird diese Informationsbroschüre jedes Semester aktualisiert. Neben Vorschlägen zur Studienplanung werden hier allgemeinere Informationen zum Gebiet *Effiziente Algorithmen* zusammengefasst. Die Broschüre gibt einen Überblick über die Lehrveranstaltungen zum Gebiet – auch an den anderen Berliner Universitäten – und die Lehrveranstaltungsplanung für die folgenden Semester. Zusätzlich gibt sie Informationen zu Tagungen und ähnlichen Veranstaltungen, zu den in der Arbeitsgruppe *Effiziente Algorithmen* tätigen Mitarbeitern und ihren Arbeitsgebieten sowie zu aktuell im Fachbereich behandelten Forschungsthemen (Diplomarbeiten, Dissertationen etc.).

Interessenten können sich im Sekretariat der Arbeitsgruppe Theoretische Informatik (Takustr. 9, Raum 111) in den Studienschwerpunkt einschreiben. Sie erhalten dann regelmäßig das Semesterheft und werden laufend über Veranstaltungen wie etwa Vorträge, Spezialschulen und Tagungen informiert.

1 Vorschlag zur Studienplanung

Für die Teilnahme am Studienschwerpunkt sind gewisse Grundkenntnisse aus dem Grundstudium unerlässlich. Es wird empfohlen, Vorlesungen und Kurse zu Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitstheorie, Graphentheorie, Algorithmen und Datenstrukturen sowie Programmierung frühzeitig zu besuchen. Innerhalb des Hauptstudiums ist sowohl eine Orientierung in mathematisch-theoretischer Richtung als auch eine zu Anwendungsgebieten hin möglich. Im folgenden geben wir Empfehlungen zur Organisation des Studiums für beide Richtungen. Natürlich sind auch Mischformen und eine andere Organisation möglich.

Die Angebote des Hauptstudiums werden im Studienschwerpunkt mit einem Kürzel ([EA 1,2] Entwurf und Analyse von Algorithmen, [ADM] Angewandte Diskrete Mathematik, [ANW] Anwendungen, [PR] Praktikum) gekennzeichnet. Das Kürzel zeigt an, für welche Phase des Studiums die Veranstaltungen geeignet sind. Der Vorschlag sollte individuell durch begleitende Lehrveranstaltungen aus Mathematik und Informatik ergänzt werden.

Vertiefung in theoretischer Richtung.

[EA1] (3V + 2 Ü) im 5. Semester
Entwurf und Analyse von Algorithmen.

[EA2] (3V + 2 Ü) im 6. Semester
Themenbeispiele: *Algorithmische Geometrie* oder *Graphenalgorithmen* oder *Optimierung* oder *Parallele Algorithmen* oder ...

[ADM] Zumindest eine Vorlesung und ein Seminar im 7. & 8. Semester.
Themenbeispiele: *Polytope* oder *Pattern Matching* oder *Randomisierte Algorithmen* oder *Graphenalgorithmen* oder ...

⋆ anschließend *Diplomarbeit.*

Vertiefung in anwendungsbezogener Richtung.

[EA1] (3V + 2 Ü) im 5. Semester
Entwurf und Analyse von Algorithmen.

[EA2] (3V + 2 Ü) im 6. Semester
Themenbeispiele: *Algorithmische Geometrie* oder *Graphenalgorithmen* oder *Optimierung* oder *Parallele Algorithmen* oder ...

[ANW] Zumindest eine Vorlesung und ein Seminar im 7. & 8. Semester.
Themenbeispiele aus den Anwendungsgebieten: *Mustererkennung* oder *Computer–Grafik* oder *Computer Aided Design* oder *Robotik* oder *Bildverarbeitung* oder *Bioinformatik* oder ...

[PR] (4 PR) Praktikum im 8. Semester.

$\star$ anschließend *Diplomarbeit.*

Entsprechend den vorgehenden Vorschlägen sollen Zyklen von einander ergänzenden Veranstaltungen angeboten werden. Am Beginn jedes Zyklus werden den behandelten Themen Kürzel zugewiesen und der Plan im Semesterheft angekündigt.
In diesem Sommersemester bieten sich als mögliche Fortsetzunge zur Vorlesung *"Entwurf und Analyse von Algorithmen"* die Vorlesungen *"Algorithmische Geometrie"* und *"Approximationsalgorithmen"* an. In diesem Semester gibt es eine Reihe von interessanten Seminaren und Praktika. Das Seminar über *"Algorithmen"* vertieft Themen aus den vorangegangenen Vorlesungen.
Ein Seminar über sogenannte *Pseudotriangulierungen* soll dieses Thema, das Gegenstand eines Forschungsprojektes ist, von verschiedenen Seiten beleuchten.
Das Praktikum *Coputersehen* schließt an die vorangegangene Vorlesung an.
Das Praktikum über *Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen* dient der praktischen Anwendung der Kenntnisse aus *Entwurf und Analyse von Algorithmen.* Teilweise können dort auch *Algorithmen zum Abzählen und Aufzählen* behandelt werden.

Realisierung im Studienplan.

Die Realisierung innerhalb der bestehenden Studiengänge wird für Mathematik und Informatik getrennt behandelt.

Diplomstudiengang Mathematik.

Bei Teilnahme am Studienschwerpunkt wird Studenten der Mathematik die Belegung des Nebenfachs Informatik empfohlen.

- Grundstudium.

  Auf jeden Fall sollte die *Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie* besucht werden. Ein *Programmierkurs* ist Pflicht im Grundstudium. Die Vorlesungen *Informatik A* und *B* sind Teil der Nebenfachausbildung. Grundkenntnisse in diskreter Mathematik können durch einen möglichst frühen Besuch von *Kombinatorik* und/oder *Graphentheorie* erworben werden.

- Hauptstudium.

  [EA1] Anrechnung in A (Angew. Mathematik).

  [EA2] & [ADM] Anrechnung in B (Einarbeitung in Spezialgebiet).

  [ANW] & [PR] Anrechnung im Nebenfach Informatik.

  Seminare: Anrechnung im Rahmen der mindestens 2 Seminare.

Bei der Diplomprüfung aus Angew. Mathematik wird neben Algorithmentheorie auch ein weiteres Gebiet (Wahrscheinlichkeitstheorie oder Numerik) geprüft.

Diplomstudiengang Informatik.

- Grundstudium.

  Die Grundkenntnisse werden durch die Lehrveranstaltungen *Algorithmen und Programmierung III* und *Mathematik für Informatiker* abgedeckt.

- Hauptstudium.

  [EA1] & [EA2] Anrechnung in Theoretische Informatik.

  [ADM] & [ANW] & [PR] Anrechnung im Rahmen der 14 SWS im Studienschwerpunkt.

  Seminare: Anrechnung im Rahmen der mindestens 2 Seminare.

2 Lehrveranstaltungen im Sommer 2005

Vorlesungen

Algorithmische Geometrie [EA2]

Dozent: Alt; Vorlesungszeit: Di, Do 10–12 Uhr, 4-stündig,
Veranstaltungsort: Takustraße 9, SR 005.
Übungen Alt, Broser 4-stündig .
Beginn: 13.04.2005Rote

Inhalt: Effiziente Algorithmen für geometrische Probleme, z.B. Finden der konvexen Hülle einer Punktmenge, Voronoi-Diagramme, Delaunay-Triangulierung, geometrische Datenstrukturen, etwa zum Finden eines Punktes in einer ebenen Unterteilung. Das Gebiet hat Anwendungen in Computer-Graphik, Muster- und Formerkennung, geographischen Informationssystemen, CAD usw. Da es sich um das Hauptarbeitsgebiet der AG Theoretische Informatik handelt, ist ein Besuch für alle ratsam, die bei einem Dozenten dieser Gruppe eine Diplom-, Magister- oder Examensarbeit anfertigen wollen. Solche Arbeiten können im Anschluss an die Vorlesung vergeben werden.

Literatur: J.-D. Boissonnat, M. Yvinec. Algorithmic Geometry. Cambridge University Press, 1998. R. Klein. Algorithmische Geometrie. Addison-Wesley, 1997. M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars, O. Schwarzkopf. Computational Geometry: Algorithms and Applications. Springer-Verlag Berlin, 1997. F.P. Preparata, M.I. Shamos. Computational Geometry: An Introduction. Springer-Verlag New York, 1985.

Approximationsalgorithmen [EA2,ANW]

Dozent: Knauer; Vorlesungszeit: Mo 10.00–12.00 Uhr, Fr 10.00–12.00 Uhr, 4-stündig,
Veranstaltungsort: Takustraße 9, Seminarraum - 051.
Übungen Knauer, Mulzer 2-stündig.
Beginn: 11.04.2005

Inhalt: Diese Veranstaltung ist eine Fortsetzung der Vorlesung “Entwurf und Analyse von Algorithmen”.

Viele fundamentale, insbesondere auch für Anwendungen wichtige Optimierungsprobleme sind NP-schwer, d.h. sie lassen sich in der Praxis nicht exakt lösen (sofern P ungleich NP ist). Daher stellt sich die Frage, wie gut sich optimale Lösungen approximieren lassen. Es zeigt sich, daß sich für viele Probleme tatsächlich Lösungen effizient berechnen lassen, die dicht am Optimum liegen, während andere Probleme beweisbar jedem Approximationsversuch widerstehen. In dieser Vorlesung beschäftigen wir uns mit dem Gebiet der Approximationsalgorithmen, auf dem sich gerade in letzter Zeit viel getan hat. Einerseits behandeln wir den Entwurf und die Analyse solcher Algorithmen. Andererseits lernen wir die Grenzen kennen, die jedem Näherungsverfahren gesetzt sind.

Literatur: "Introduction to Algorithms", von Cormen, Leiserson, Rivest, (Stein)
"Approximation Algorithms for NP-hard Problems" von D.S.Hochbaum
"Computational Complexity" von C.H.Papadimitriou
"Computers and Intractability: a guide to the theory of NP-completeness" von Garey, Johnson
"Approximation Algorithms" von Vijay V. Vazirani
und Originalliteratur.

Seminare, Praktika und sonstige Veranstaltungen

Seminar über Algorithmen [ADM,ANW]

Dozent: Alt; Vorlesungszeit: Do 16–18. , 2-stündig.
Veranstaltungsort: Takustraße 9, SR 055.
Beginn: 14.04.2004

INHALT: Hinweis: "im Hauptstudium" bedeutet, dass ein bestandenes Vordiplom oder äquivalente Leistungen Voraussetzung für die Teilnahme sind. Eventuell kann davon abgesehen werden, wenn der Schein in "Entwurf und Analyse von Algorithmen" bereits vorliegt.

Seminar über algorithmische und kombinatorische Geometrie (Pseudotriangulierungen) [ADM]

Dozent: Rote, Schulz; Vorlesungszeit: Di 16:00–18:00, 2-stündig.
Veranstaltungsort: Takustraße 9, SR 055
Vorbesprechung: 12.04.2005

Inhalt: Eine Pseudotriangulierung ist eine Zerlegung eines ebenen Bereichs in Polygone mit jeweils genau drei konvexen Ecken und beliebig vielen einspringenden Ecken (Pseudodreiecke). In jüngster Zeit hat man erkannt, dass Pseudotriangulierungen viele wünschenswerte Eigenschaften haben und auch bei der Untersuchung der Bewegung von Gelenkssystemen, wie sie etwa bei der Bewegungsplanung von Robotern auftreten, eine wesentliche Rolle spielen. Sie werden auch als Datenstrukturen, insbesondere für die Simulation dynamischer Bewegungen, verwendet. In dem Seminar werden die verschiedenen Aspekte von Pseudotriangulierungen aus algorithmischer und kombinatorischer Sicht behandelt.
Vorläufige Themen:

Ray shooting in einfachen Polygonen
Constrained Minimum Pseudo-triangulierungen
Flip-Abstand bei Pseudo-Triangulierungen
Grad Schranken bei Pseudo-Triangulierungen
Pseudo-Triangulierungen als max. lokal konvexe Funktionen
Kombinatorische Pseudo-Triangulierungen
Der Zickzack Pfad einer Pseudo-Triangulierung
Aufzählen von Pseudo-Triangulierungen mit greedy Flips
Das Polytop der gespitzten Pseudo-Triangulierungen
Anzahl der Pseudo-Triangulierungen von Rädern
Der Sichtbarkeitskomplex
Anwendungen in der kombinatorischen Geometrie

Literatur: Originalarbeiten.

Diplomanden- und Doktorandenseminar Theoretische Informatik **[ADM]**

Dozent: Alt, Rote, Knauer, Kriegel; Vorlesungszeit: Di, Do, Fr 12–13 Uhr; Veranstaltungsort: Takustraße 9, SR 055;

Inhalt: Vorträge über eigene Forschung und Originalarbeiten aus der Theoretischen Informatik, insbesondere Algorithmen. Die Ankündigungen werden jeweils gesondert gegenüber Raum 111 in der Takustraße 9 ausgehängt.

Praktikum zum Computer-Sehen [PR]

Dozent: Alt, Scharf; Vorlesungszeit: Di 16–18 Uhr, 2-stündig.
Veranstaltungsort: SR 051.
Beginn: 12.04.2005

Voraussetzungen: Vorlesung “Computer-Sehen” im WS 04/05

Praktikum Implementierung effizienter Algorithmen und Datenstrukturen [PR]

Dozent: Knauer, Rote, Lenz; Vorlesungszeit: Mi 16–19 Uhr, 3-stündig.
Veranstaltungsort: SR 051.
Beginn: 13.04.2005

Inhalt: Diese Veranstaltung ist eine Fortsetzung der Vorlesung “Entwurf und Analyse von Algorithmen”; zum Teil baut sie auch auf “Algorithmen zum Abzählen und Aufzählen” auf. In Einzel- oder Gruppenprojekten soll die Implementierung von effizienten Algorithmen und Datenstrukturen geübt werden. Vorläufige Themen:

- Kontingenztafeln
- Fibouacciheaps + kürzere Wege in Graphen
- Skiplisten, (a;b) - Bäume, Traeps
- Suffixbäume + Suffixarrays, LCA - Anfragen
- Gradfolgen von Triangulierungen
- Abzählen von Polyminos
- Partition - trees
- Spannerkonstruktion (Θ - Graphs + WSPD)
- Cuttings
- Shortest paths on polytopes
- Visibility maps

Literatur: “Introduction to Algorithms” von Cormen, Leiserson, Rivest, (Stein)
“Data Structures and Algorithms in Java” von Goodrich, Tamassia
“Algorithms in Java” von Sedgewick
und Originalliteratur

Vorlesung des Europäischen Graduiertenkollegs
Combinatorics, Geometry and Computation [ADM]

Dozent: Alt u. Doz. des Kollegs, Vorlesungszeit: Mo 14-16 Uhr, 2-stündig; Veranstaltungsort: Takustraße 9, SR 005, zum Teil auch an der TU und HU. Genauere Angaben über den Veranstaltungsort sind dem wöchentlichen Aushang und der Internetseite des Graduiertenkollegs zu entnehmen. (`http://www.inf.fu-berlin.de/graduate-programs/cgc/index_bln.html`)

Inhalt: Die Dozenten und Gäste des Kollegs halten einführende Vorlesungen (in Blöcken von etwa 2–4 Stunden) zu speziellen Themen des Kollegs. Dazu gehören insbesondere algorithmische und diskrete Geometrie, algorithmische Kombinatorik, Codierungstheorie, Graphentheorie und Graphenalgorithmen, Gruppentheorie, kombinatorische Optimierung, konstruktive Approximation, Mustererkennung und zufällige diskrete Strukturen. Die Themen der Vorlesungen werden auch neben Raum 111 in der Takustraße 9 ausgehängt. (Interessenten können sich bei der Koordinatorin des Kollegs, Frau A. Hoffkamp, auf einen Verteiler für das Verschicken der Ankündigungen setzen lassen.)

Kolloquium des Europäischen Graduiertenkollegs
Combinatorics, Geometry, and Computation **[ADM]**

Dozent: Alt u. Doz. des Kollegs; Vorlesungszeit: Mo 16-18 Uhr, 2stündig; Veranstaltungsort: Takustraße 9, SR 005, zum Teil auch an der TU, HU und ZIB. Genauere Angaben über den Veranstaltungsort sind dem wöchentlichen Aushang und der Internetseite des Graduiertenkollegs zu entnehmen. (`http://www.inf.fu-berlin.de/graduate-programs/cgc/index_bln.html`)

Inhalt: Mitglieder und Dozenten des Kollegs sowie Gäste halten Vorträge zum Thema des Kollegs. Die einzelnen Vorträge im Kolloquium werden gesondert angekündigt. (Interessenten können sich bei der Koordinatorin des Kollegs, Frau A. Hoffkamp, auf einen Verteiler für das Verschicken der Ankündigungen setzen lassen.) Die Ankündigungen werden auch neben Raum 111 in der Takustraße 9 ausgehängt.

Die Vorlesungen des Graduiertenkollegs im Sommer 2005

- 18. April 2005

Alexander Bockmayr, Freie Universität Berlin,DFG Research

Center Matheon

- 25. April 2005
Jeff Erickson, University of Illinois at Urbana-Champaign

- 2. Mai 2005
Philippe Flajolet, INRIA Rocquencourt

- 9. Mai 2005
Ingo Althöfer, Friedrich-Schiller-Universität Jena

- 23. Mai 2005
Colin Cooper, King's College, University of London

- 30. Mai 2005
Jürgen Richter-Gebert, Technische Universität München

- 13. Juni 2004
Joe Mitchell, State University of New York at Stony Brook

- 20. Juni 2004
Thorsten Theobald, Technische Universität Berlin

- 27. Juni 2004
Berthold Vöking, RWTH Aachen

- 4. Juli 2004
Johannes Blömer, Universität Paderborn

- 11. Juli 2004
Ralph-Hardo Schulz, Freie Universität Berlin

Die Kolloquiumsvorträge des Graduiertenkollegs im Sommer 2004

- 18. April 2005
José Neto, INT Évry

- 25. April 2005
Kamil Kloch, Jagiellonian University

- 2. Mai 2005
Tim J. Tautges, Sandia National Laboratories Albuquerque

- 9. Mai 2005
Tzvetalin Vassilev, University of Saskatchewan

- 23. Mai 2005
TARAL GULDAHL SEIERSTAD, HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN:
- 30. Mai 2005
STEPHAN HELL, TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
- 13. Juni 2004
MAIKE BUCHIN, FREIE UNIVERSITÄT BERLIN
- 20. Juni 2004
LEON PEETERS, ETH ZÜRICH
- 27. Juni 2004
ÉRIC FUSY, INRIA ROCQUENCOURT
- 4. Juli 2004
OLIVER KLEIN, FREIE UNIVERSITÄT BERLIN
- 11. Juli 2004
KEVIN BUCHIN, FREIE UNIVERSITÄT BERLIN

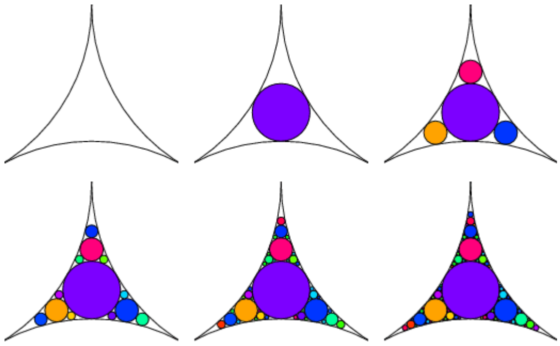
3 Bachelorarbeiten, Diplomarbeiten, Dissertationen, Projekte

Die von der Arbeitsgruppe Theoretische Informatik behandelten Forschungsthemen werden an Bachelorarbeiten, Diplomarbeiten, Dissertationen und Projekten beispielhaft vorgestellt.

Bachelorarbeit: Überdeckung der Ebene durch Kreispackungen

Kandidat: *Leszek Mysliwiec*, Betreuer: *Günter Rote*
Mit einer Menge von disjunkten Kreisen kann man die Ebene nicht vollständig ausfüllen, selbst wenn man unendlich viele Kreise verwendet (siehe Abbildung). Selbst wenn man alle Kreise um den Faktor 1.00001 von ihrem Mittelpunkt aus aufbläst, wird die Ebene nicht überdeckt (es sei denn, die Packung enthält

unbeschränkt große Kreise). In dieser Arbeit sollen die Parameter des Beweises dieser Aussagesorgfältig eingestellt werden, damit der Vergrößerungsfaktor größer wird, wobei der Beweis immer noch funktionieren und vielleicht sogar noch einfacher werden soll.
Diese Untersuchungen spielen eine Rolle beim Entwurf von guten Verbindungsnetzen in der Ebene, bei denen der "Umweg" zwischen zwei beliebigen Punkten des Netzes, bezogen auf die Luftlinie, nicht zu groß werden soll.

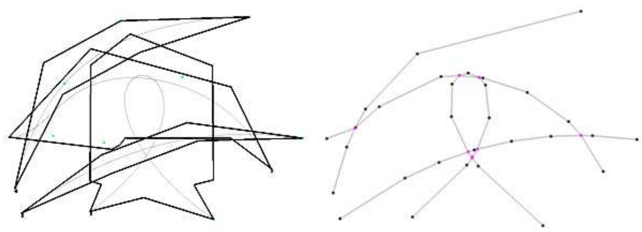


Diplomarbeit: Kontrollpolygone als geometrische Filter

Diplomandin: *Kathrin Holweger*, Betreuer: *Christian Knauer*

Die Berechnung planarer Arrangements hat grosse Bedeutung in der Computergeometrie. Diese Arbeit widmet sich speziell dem Arrangement von Bezier-Kurven. Die Schnittpunktberechnung, welche das wesentliche Problem der Konstruktion des Arrangements darstellt, ist für Kurven mathematisch sehr aufwendig. Aus diesem Grund wird durch einen Filterprozess versucht, möglichst viel Information über die Lage der Kurven untereinander zu erhalten, ohne die Kurven selbst in Berechnungen einzubeziehen. Hierzu werden die Kurven ersetzt durch Polygone - bezeichnet als Envelopes - die die jeweilige Kurve möglichst eng umschliessen. Dafür wird auf eine Schranke zurückgegriffen, die von Lutterkort et al. hergeleitet wurde.
Das Arrangement der Envelopes wird analysiert, wobei der Aufbau der einzelnen entstandenen Flächen betrachtet wird und daraus Schlussfolgerungen über mögliche, tatsächliche oder keine darin vorliegenden Schnitte gezogen werden. Verfeinerungen können mit Hilfe von Subdivision erreicht werden, woraus

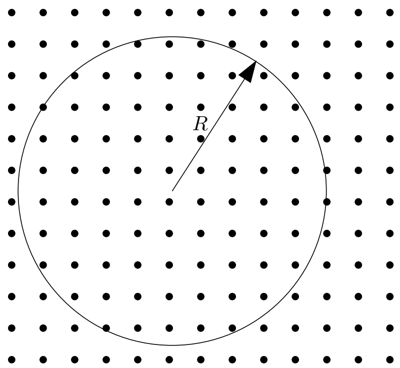
engere Envelopes resultieren und die aus dem Arrangement gewonnene Information genauer wird. Diese Verfeinerung kann bis zu einer beliebigen Genauigkeit wiederholt werden. Eventuell übrig bleibende mögliche Schnittpunkte können einer exakten Kurvenschnittpunktberechnung übergeben werden, welche durch die Einschränkung des Schnittpunktes auf ein beliebig kleines Intervall verlgeichsweise effizient erfolgen kann. Das Ergebnis ist schließlich ein Arrangement Graph der Kurven, welcher auf den in der Filterung identifizierten Schnittpunkten basiert.



Diplomarbeit: Numerische Untersuchungen zum Kreisproblem

Diplomand: *Christian Paul*, Betreuer: *Günter Rote*

Wenn man in einem großen ebenen Gebiet die ganzzahligen Gitterpunkte zählt, dann sollte man erwarten, dass ihre Anzahl ungefähr der Fläche des Gebietes entspricht, wenn der Rand nicht zu “wild” ist. Ein Kreis vom Radius R enthält dementsprechend ungefähr $R^2\pi$ ganzzahlige Gitterpunkte, manchmal etwas mehr, manchmal etwas weniger. Die Abweichung zwischen diesem Sollwert und der tatsächlichen Anzahl ist Gegenstand des sogenannten Kreisproblems in der Zahlentheorie, das auf Gauß zurückgeht.



Die genaue Größenordnung des Fehlers ist nicht bekannt. Man weiß aber, dass die Abweichung höchstens von der Ordnung $R^{46/73}$ ist. Es gibt jedoch unendlich viele Kreise, bei denen die Abweichung mindestens von der Ordnung $\sqrt{R}\log^{1/4} R$ ist; man vermutet, dass die Wahrheit näher bei der unteren Schranke liegt.
In dieser Diplomarbeit wird das Verhalten des Fehlers mit Methoden aus der algorithmischen Geometrie experimentell untersucht. Dabei werden nicht nur Kreise betrachtet, die den Mittelpunkt im Ursprung haben, wie im klassichen Kreisproblem, sondern mit beliebigen Mittelpunkten. Dadurch erreicht man, dass die größte Abweichung für einen gegebenen Radius R, als Funktion von R betrachtet, weniger starke Sprünge macht als im klassischen Kreisproblem.

Dissertation: Complex Tracing

Doktorandin: *Britta Broser*, Betreuer: *Helmut Alt, Ulrich Kortenkamp*

Hinter den Kulissen der Geometriesoftware *Cinderella* verbirgt sich eine elegante mathematische Theorie, die sich aus verschiedenen Bereichen zusammensetzt. Aus ihr ergeben sich Fragen zwischen Komplexitätstheorie und Geometrie, die zum Teil noch ungelöst sind.
In *Cinderella* werden geometrische Konstruktionen durch geometrische Straight-Line Programme (GSP) repräsentiert. Diese setzen sich aus freien Punkten und abhängigen Elementen wie z. B.

- der Verbindungsgeraden zweier verschiedener Punkte,
- dem Schnittpunkt zweier verschiedener Geraden,
- einer der beiden Winkelhalbierenden zweier Geraden,
- einer der höchstens zwei Schnittpunkte einer Geraden mit einem Kreis

zusammen. Eine Instanz eines GSP ist eine Zuweisung von festen Werten zu allen freien Punkten und Wahlen. Ein GSP entspricht also einer formalen Kon-

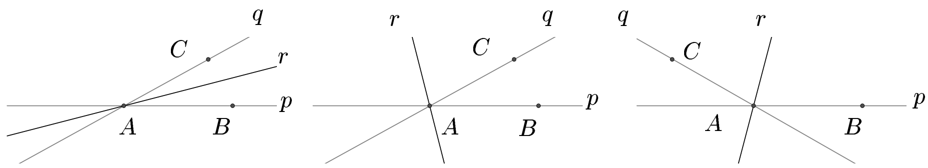


Abbildung 1: Drei verschiedene Instanzen des GSPs aus dem Beispiel

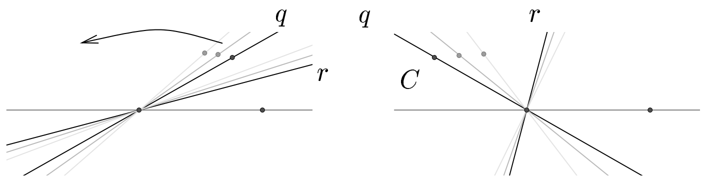


Abbildung 2: Die linke Instanz aus Abb. 1 kann „stetig“ in die rechte überführt werden.

struktionsbeschreibung und eine Instanz einer konkreten Zeichnung in der Ebene.

Beispiel für ein GSP:

$$
\begin{array}{lcll}
A & \leftarrow & FREE & \backslash\backslash\ A \text{ ist ein freier Punkt.} \\
B & \leftarrow & FREE & \backslash\backslash\ B \text{ ist ein freier Punkt.} \\
C & \leftarrow & FREE & \backslash\backslash\ C \text{ ist ein freier Punkt.} \\
p & \leftarrow & JOIN(A,B) & \backslash\backslash\ p \text{ ist die Gerade durch } A \text{ und } B. \\
q & \leftarrow & JOIN(A,c) & \backslash\backslash\ q \text{ ist die Gerade durch } A \text{ und } C. \\
r & \leftarrow & BISECT(p,q) & \backslash\backslash\ r \text{ ist Winkelhalbierende von } p \text{ und } q.
\end{array}
$$

Abbildung 1 zeigt drei Instanzen dieses GSPs. Man sieht leicht, daß die linke Instanz „stetig“ in die rechte überführt werden kann (s. Abb. 2). Im allgemeinen ist es jedoch nicht immer möglich, eine vorgegebene Instanz „stetig“ in eine weitere vorgegebene Instanz zu überführen. In [1] wird gezeigt, daß das sogenannte „Reachability Problem“ NP-schwer ist.

Die Komplexität des selben Problems im Komplexen (d.h. die Koordinaten der freien Punkte und der abhängigen Elemente dürfen Werte aus $\mathbb{C}$ annehmen) ist hingegen noch unbekannt.

Ein weiteres Problem ist das „Tracing Problem“, das mit dem Reachability

Problem verwandt ist. Hier liegt die gleiche Situation vor: In [1] wird gezeigt, daß es im Reellen NP-schwer ist, und die Komplexität im Komplexen ist unbekannt. Das sogenannte „Complex Tracing“ könnte z.B. für das automatische Beweisen oder das Umgehen von Singularitäten in *Cinderella* verwendet werden.
Literatur: J. Richter-Gebert, U. Kortenkamp, *Complexity Issues in Dynamic Geometry*, Proceedings of the Smale Fest 2000, 2001

Dissertation: Datenstrukturen zum Auffinden von Formen

Doktorand: *Lutz Meißner*, Betreuer: *Helmut Alt.*
Die Menge aller Polygonzüge in der Ebene wird, etwa durch den Hausdorff- oder den Fréchet-Abstand, zu einem metrischen Raum. Von besonderem Interesse sind die Räume, bei denen zur Abstandsmessung die einzelnen Polygonzüge "verschoben" werden können:

$$\delta(P, Q) = \min_{t \in \mathbf{R}^2} \tilde{\delta}(P, Q + t)$$

Es läßt sich nun, bei gegebenen Polygonzügen $P_1, P_2, \ldots, P_n$, die Frage stellen, welches dieser P_i einem weiteren Polygonzug P am "ähnlichsten" ist:

$$\mathrm{NN}(P) = \{P_i | \delta(P, P_i) \leq \delta(P, P_j) \text{ für } j = 1, \ldots, n\}$$

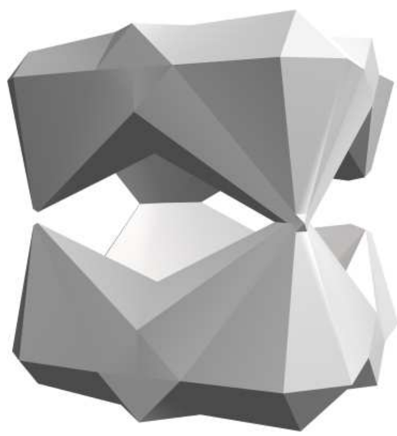
Gesucht ist also der nächste Nachbar (oder die nächsten Nachbarn) von P. Ist man nicht nur an der Bestimmung des nächsten Nachbarn eines, sondern vieler Polygonzüge interessiert, ist es sinnvoll, $P_1, P_2, \ldots, P_n$ in einer Datenstruktur zusammenzufassen, um eine effiziente Abfrage zu ermöglichen. Aber wie muß diese Datenstruktur aussehen?
Für die Nächste-Nachbar-Suche von Punkten im $\mathbf{R}^d$ sind effiziente Datenstrukturen bekannt. Diese nutzen jedoch Eigenschaften, etwa die endliche Dimensionalität oder die Vektorraum-Eigenschaften, aus, die bei den Polygonzügen nicht vorhanden sind.
Bei den bekannten Methoden in allgemeinen "großen metrischen Räumen" werden Voraussetzungen sowohl an die zugrundeliegende Metrik als auch an die

Verteilung der Datenmenge gestellt, die hier nicht oder nur bedingt zutreffen. Weiter gibt es kaum Aussagen zu den erwarteten Laufzeiten.
Die Berechnung des Abstands zweier Polygonzüge ist zeitaufwendig. Es stellt sich die Frage, ob zur Bestimmung von $\mathrm{NN}(P)$ tatsächlich P mit einzelnen P_i verglichen werden muß, oder ob ein effizienteres Vorgehen möglich ist.
Obwohl zunächst die theoretischen Aspekte untersucht werden, wird auch an die Implementierung von entwickelten Ansätzen gedacht.

Dissertation: Topologie von Konturen d–dimensionaler Funktionen

Doktorand: *Tobias Lenz*, Betreuer: *Günter Rote*

In vielen wissenschaftlichen Gebieten spielt die Visualisierung von Daten eine zunehmende Rolle. Dabei werden Werte an sehr vielen fixen Positionen gemessen, z.B. die Höhe über dem Meeresspiegel für einen bestimmten Landstrich, aus dem Körper austretende elektromagnetische Wellen in einem Kernspinresonanztomographen oder Hitze in einer Brennkammer. Die Daten liegen als Paare von Punkten in einer bestimmten Dimension und den dazugehörigen Messwerten vor und ihre Anzahl kann bei sehr detaillierten Messungen durchaus Größenordnungen von einigen Millionen annehmen.
Derartige Datenmengen können nicht in Echtzeit durchsucht werden, so dass man geeignete Datenstrukturen verwenden muss, um effizient bestimmte Teilmengen zu erhalten. Eine wichtige Teilmenge ist hierbei die Menge aller Punkte, die einen bestimmten Wert haben — so genannte Isolinien bzw. Isoflächen oder auch Konturen.



Untersucht man eine solche Kontur, so stellt sich diese sehr vielgestaltig dar, kann zusammenhängend oder in viele Teile zerlegt sein, Tunnel bilden, Hohlräume einschließen und vieles mehr. Ein Beispiel für eine dreidimensionale Kontur aus einer vierdimensionalen Datenmenge ist auf dem Bild zu sehen. Diese errechnete topologische Struktur liefert in Form der so genannten Betti–Zahlen eine sinnvolle Gruppierung der Objekte.
Bei praktischen Messungen ist immer ein ge-

wisser Fehler enthalten — auch als "Rauschen"
bekannt. Dieses Rauschen kann bereits empfindlichen Einfluss auf die geschilderten topologischen Eigenschaften der Konturen haben, so dass ein Verfahren benötigt wird, um relevante Eigenschaften zu erkennen und zu extrahieren. Dieses Verfahren wird entwickelt und untersucht. In Experimenten hat sich herausgestellt, dass dieses Verfahren evtl. auch für effiziente Suchanfragen in geometrischen Datenbanken anwendbar ist.

Dissertation: Three Dimensional Surface Approximation

Doktorandin: *Astrid Sturm*, Betreuer: *Günter Rote*

(Im Rahmen des Projektes: ECG, Effective Computational Geometry for Curves and Surfaces.)

We intend to revisit the field of Computational Geometry in order to understand how structures that are well-known for linear objects behave when defined on curves and surfaces.

Algebraic issues:

Several operations on nonlinear geometric objects, often lying at the algorithm's bottleneck, are equivalent to manipulating polynomials. A fundamental question is the solution of algebraic systems, ubiquitous in the construction of new objects, such as intersections. Another crucial goal is the implementation of primitives with Boolean or discrete output, such as an object is contained in some bounding object.

Robustness issues:

Geometric programs are notorious for their non-robustness: algorithms are designed for a model of computation where real numbers are dealt with exactly and geometric algorithms are frequently only formulated for inputs in general position. This is not simply an academic problem. It is easy to crash any commercial CAD-system. Progress has been made only in recent years. A significant part of the progress was made by the proposers and centers around the so-called exact computation paradigm. We will extend this paradigm to curved objects.

Approximating curves and surfaces:

Since algorithms for curves and surfaces are more involved, more difficult to make robust and typically several orders of magnitude slower than their linear counterparts, there is a need for approximate representations. Our objective is

to provide robust and quality guaranteed approximations of curves and surfaces.
Patricipating sites:
INRIA Sophia Antipolis - France (coordinator)
ETH Zürich - Switzerland
Freie Universität Berlin - Germany
Rijksuniversiteit Groningen - Netherlands
MPI Saarbrücken - Germany
Tel Aviv University - Israel

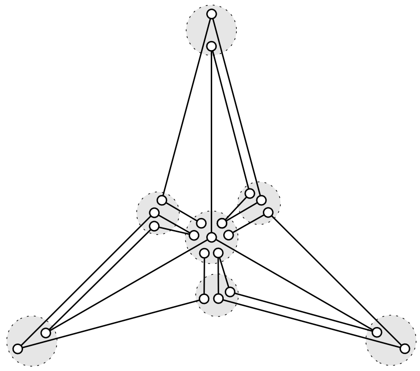
Dissertation: Locked and Unlocked Self-Touching Linkages

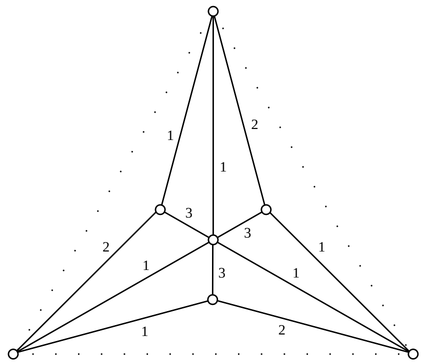
Doktorandin: *Ares Ribó Mor*, Betreuer: *Günter Rote*

In the last years, there has been much progress in the study of planar linkages that are *locked*, in the sense that there exists no motion into some other configuration preserving the bar lengths and without bars crossing. A *linkage* is a graph where edges are *rigid bars* with fixed length and vertices are flexible joints. A *configuration* of a linkage in $\mathbb{R}^2$ is a mapping of the vertices to points in $\mathbb{R}^2$. In the plane, the combinatorial planar embedding is specified because this cannot change by a motion that avoids crossings.
The problem is to analyze which planar linkages are locked. The tools used for this topic are geometric planar properties combined with techniques from rigidity theory, like first-order rigidity and equilibrium stresses.
It is known that a polygonal tree can be locked, and that a polygonal arc, a polygonal cycle or a disjoint union of nonnested polygonal arcs and cycles is always unlocked. The key distinction is that arc and cycles have maximum degree 2, but a tree may have vertices of higher degree. In fact, a single degree-3 vertex can prevent opening.
We have shown that every monotone tree is unfoldable, using geometric relations between segments with disjoint interiors in the plane. Other related questions are: is every arbitrarily flattened tree unfoldable? And, more general: which conditions must be satisfied by a tree for being unlocked?

STC, which is locked

In a *self-touching configuration* (STC) bars can touch and even lie along each other, but not properly cross. The set of feasible motions can be described by





linear equations and inequalities, which are stable at least in some neighbourhood of the STC. A *δ-perturbation* of a STC is a repositioning of the vertices within disks of radius δ consistent with the combinatorial embedding in $\mathbb{R}^2$. Locked linkages are often based on approximations to STC.
We have the following conjecture: for all STC and for all $\delta > 0$, there is a δ-perturbation that is a configuration without bars crossing. The idea for the proof is to model the configuration by a linear problem, and to show that the dual has a bounded solution. We treat the dual problem in terms of equilibrium stresses and study the properties of the geometric representation of the proportional distribution of this stresses.

Dissertation: Der Fréchet-Abstand von triangulierten Flächen

Doktorandin: *Maike Walther* Betreuer: *Helmut Alt*
Der Fréchet-Abstand ist ein Abstandsmaß für parametrisierte Kurven und Flächen, welches den Verlauf der Kurven bzw. Flächen berücksichtigt. Wir interessieren uns dabei für endlich beschreibbare Kurven und Flächen, und zwar für polygonale Kurven und triangulierte Flächen. Zur Berechnung des Fréchet-Abstands von polygonalen Kurven haben H. Alt und M. Godau einen polynomiellen Algorithmus entwickelt. Für den Fréchet-Abstand von triangulierten Flächen hat M. Godau für das Entscheidungsproblem NP-Schwerheit gezeigt. Offene Fragen sind die nach der Berechenbarkeit oder einem Approximationsalgorithmus. Ein möglicher Ansatz für einen Approximationsalgorithmus ist eine diskrete Approximation. Für polygonale Kurven ist dies unter Ausnutzung der Linearität des Parameterraums möglich. Ob sich der Fréchet-Abstand für Flächen auf ähnliche Weise diskret approximieren lässt, ist eine

offene Fragestellung an der wir momentan arbeiten.

Dissertation: Matching Shapes with a Reference Point

Doktorand: *Oliver Klein* Betreuer: *Günter Rote*

Given two sets $A, B \in \mathcal{C}^2$, where $\mathcal{C}^2$ is the set of compact subsets of $\mathbb{R}^2$, one can be interested in how these sets resemble each other. One good measure of resemblance is the Hausdorff-Distance δ_H. This distance is defined as the smallest ε such that the Euclidian distance from every point of A to its nearest point of B is at most ε and vice versa. For measuring the resemblance of the two sets, one has to determine the minimal Hausdorff-Distance under a given set of transformations. For example, these transformations can be translations, rigid motions (translations and rotations) or even similarity transformations (rigid motions and scalings). Algorithms for determining the optimal transformation to minimize the Hausdorff-Distance are known in all three cases, but the run-time of these algorithms is not satisfying for most applications.
To decrease the run-time, the authors of [?] use reference points to get an approximation for the problem. A reference point is a mapping $r : \mathcal{C}^2 \to \mathbb{R}^2$ which fulfills two properties, namely

1. r is equivariant with respect to the set of transformations $\mathcal{T}$:

$$\forall T \in \mathcal{T}\ \forall A \in \mathcal{C}^2 : \ r(T(A)) = T(r(A))$$

2. r is a Lipschitz-continuous mapping in the following meaning:

$$\exists c \in \mathbb{R}_{>0}\ \forall A, B \in \mathcal{C}^2 : ||r(A) - r(B)|| \leq c\delta_H(A, B)$$

   In this context, c is called the quality of the reference point.

In [?] the Steiner point is shown to be a reference point with quality $\frac{4}{\pi}$. It is additionally shown, that this quality is optimal, which means that there cannot be any reference point with a smaller Lipschitz constant. This is shown by using strong functional-analytic tools and the axiom of choice. Therefore the proof is not constructive.
In [?] it is also shown, how an approximation algorithm using reference points with approximation ratio $1 + c$ with respect to translations can be developed.

For other sets of transformations, this algorithm can be used in a natural way to reduce several degrees of freedom.
Summarizing the lower bound on the quality of a reference point of $\frac{4}{\pi}$ and the upper bound of the algorithm using reference points of $1+c$ with respect to translations, where c is the quality of any reference point, it seems reasonable that there are sets $A_1, A_2, ..., A_n$ which cannot be matched in a way that

$$\forall i \neq j \in \{1, ..., n\} \ : \ \delta_H(A_i + t_i, A_j + t_j) \leq (1 + \frac{4}{\pi} - \varepsilon) \cdot \delta_H^{opt}(A, B),$$

where $\delta_H^{opt}(A, B)$ is the optimal Hausdorff-Distance which can be achieved under translations, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ is any constant and $t_i \in \mathbb{R}^2, i = 1, ..., n$ are translation vectors. Observe that under these assumptions the t_i can be interpreted as the reference points of the given sets.
In order to find compact convex sets in $\mathbb{R}^2$ which allow only an ε as small as possible in the above formula I've implemented two computer programs. The first of these uses linear programming and AMPL to calculate the minimal Hausdorff-Distance of two sets, which can be achieved under translation. The second one determines the smallest ε and the associated translation vectors such that the above formula is fulfilled, again using AMPL and the results of the first program. By using these two programs it was possible for me to find sets A_i such that $\varepsilon \approx 0.78$. This was done by using random convex polytopes in the unit square. The next step will be to transform given polytopes systematically into others calling for an even smaller ε.
Literatur:
H. Alt, B. Behrends, J. Blömer, *Approximate matching of polygonal shapes*, Proceedings 7th Annual Symposium on Computational Geometry, 1991, 186–193.
O. Aichholzer, H. Alt, G. Rote, *Matching Shapes with a Reference Point*, in International Journal of Computational Geometry and Applications, Volume 7, 1997, 349–363.

Dissertation: Algorithmen zur Bestimmung von Symmetrien

Doktorandin: *Claudia Klost* Betreuer: *Helmut Alt*

Figuren, die für den menschlichen Betrachter ähnlich erscheinen, haben oft die gleiche Symmetriegruppe. Daher könnten Algorithmen zur Bestimmung von Symmetrien verwendet werden, um aus einer Menge von Figuren diejenigen auszusuchen, die einer gebenen Figur ähnlich sind.
Eine Figur $\mathcal{F}$ heißt symmetrisch, wenn es eine Transformation α gibt, die die beiden folgenden Eigenschaften hat:

1. Sie erhält Abstände: $d(P, Q) = d(\alpha(P), \alpha(Q))$, f. a. $P, Q \in \mathcal{F}$, wobei d eine Abstandsfunktion ist.

2. Sie bildet die Figur auf sich selber ab: $\alpha(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$

Die drei folgenden Transformationen erfüllen die oben genannten Eigenschaften und werden daher für die Charakterisierung verschiedener Symmetriegruppen verwendet:

1. Spiegelungen

2. Rotationen

3. Translationen

Eine Figur, die rotations- oder spiegelsymmetrisch ist, ist endlich. Im Gegensatz dazu muss eine Figur, die translationssymmetrisch ist immer unendlich sein.
Eine Figur, die nur rotationssymmetrisch ist, hat die Symmetriegruppe C_n, mit $n = \frac{2\pi}{\theta}$ und θ ist der Rotationswinkel. Ist eine Figur sowohl rotations- als auch spiegelsymmetrisch, wird die Symmetriegruppe mit D_n bezeichnet.

Bei den unendlichen Figuren unterscheidet man zwischen zwei Klassen von unendlichen Figuren: Einerseits werden die Figuren betrachtet, die nur Translationen in eine Richtung, andererseits solche, die Translationen in zwei Richtungen beinhalten.
Die Symmetriegruppen der ersten Klasse von unendlichen Figuren sind die Friesgruppen (frieze groups). Es gibt sieben verschiedene Friesgruppen, je nachdem, welche weiteren Symmetrien das Grundmuster der Friesgruppe aufweist.

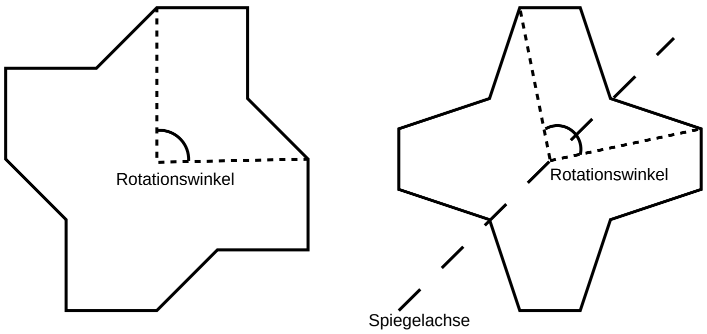


Abbildung 1: Symmetriegruppe C_4 (links) bzw. D_4 (rechts)

Die Tapetenmustergruppen (wallpaper groups) bezeichnen die Symmetriegruppen der zweiten Klasse von unendlichen Figuren. Es gibt siebzehn verschiedene Tapetenmustergruppen.

Wird der Rand einer rotationssymmetrischen Figur mit Symmetriegruppe C_n in gleichmäßigen Winkelabständen um den Schwerpunkt der Figur abgetastet, so ergibt sich eine Funktion mit Periode n. Diese Funktion kann mit Hilfe der diskreten Fouriertransformation analysiert werden, und auf Grund dieser Ergebnisse können Rückschlüsse auf die Symmetriegruppe der Figur gezogen werden.

Es stellt sich nun die Frage, in wie weit dieser Ansatz auch auf Figuren ausgeweitet werden kann, die eine der Fries- bzw. Tapetenmustergruppen als Symmetriegruppe haben.

Dissertation: Entwurf und Analyse von Algorithmen für die stochastische Geometrie

Doktorand: *Kevin Buchin* Betreuer: *Günter Rote*

In der stochastischen Geometrie werden mathematische Modelle zur Beschreibung zufälliger geometrischer Strukturen untersucht. Algorithmen auf solchen Strukturen sollten im Mittel ein gutes Laufzeitverhalten aufweisen. Dazu müssen Eigenschaften der zufälligen Strukturen analysiert und für den Entwurf des Algorithmus genutzt werden.

Oft ergeben sich solche Strukturen als Graphen auf einer zufälligen Punktmenge in einem euklidischen Raum, beispielsweise die kürzeste Strecke durch diese

Punkte oder deren Delaunay Triangulierung (Abb. 1). Insbesondere sind Algorithmen von Interesse, die diese Strukturen ausgehend von der Punktmenge finden bzw. erzeugen.

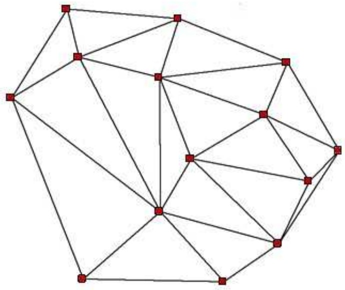


Abbildung 1: Delaunay Triangulierung von zufälligen Punkten in einem Quadrat

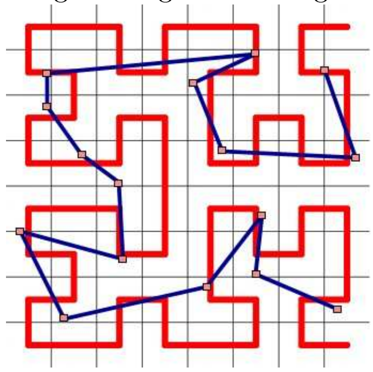


Abbildung 2: Sortierung einer Punktmenge entlang einer raumfüllenden Kurve

Für die Erzeugung der Delaunay Triangulierung wurde ein Algorithmus entworfen und analysiert, der lineare erwartete Laufzeit hat für Punkte, die uniform und unabhängig in einem konvexen Gebiet verteilt sind. Die Punkte werden in Runden eingefügt, wobei jedem Punkt zufällig eine Runde zugeordnet wird. Innerhalb einer Runde werden die Punkte entlang einer raumfüllenden Kurve sortiert (Abb.2).

Der Algorithmus kombiniert zwei komplementäre Einfügestrategien: Durch die zufällige Zuordnung zu Runden werden die Punkte gleichmäßig verteilt eingefügt und dadurch die Zahl der Dreiecke, die unnötig erzeugt werden, beschränkt. Die Sortierung entlang einer raumfüllenden Kurve führt dazu, dass aufeinanderfolgende Punkte nah aneinander liegen und dadurch schneller in der Delaunay Triangulierung lokalisiert werden können. Die für die Laufzeit wichtige Größe, die so beschränkt werden kann, ist die Anzahl der Schnitte zwischen der Tour durch die einzufügenden Punkte und der Delaunay Triangulierung der bereits eingefügten Punkte.

Dissertation: Optimale Triangulierungen

Doktorand: *André Schulz* Betreuer: *Günter Rote*

Ist S eine Menge von Punkten in der Ebene, so ist eine Triangulierung T von S ein maximaler planarer geometrischer Graph mit Knotenmenge S. Im Allgemeinen existieren zu einer gegebenen Punktmenge S exponentiell viele Triangulierungen mit zum Teil sehr unterschiedlichen Eigenschaften, und das Problem, zu gegebenem S eine Triangulierung mit "möglichst guten" Eigenschaften zu berechnen, ist von großem Interesse nicht nur in der algorithmischen Geometrie, sondern auch in der Computergrafik oder der numerischen Analysis.

Eine spezielle Art von optimalen Triangulierungen, die untersucht werden sollen, sind diejenigen Triangulierungen T, welche die optimale *graphentheoretische Dilatation* erreichen, d.h. welche den maximalen *Umweg* zwischen zwei Punkten $u, v \in S$ minimieren, wobei mit *Umweg* das Verhältnis zwischen dem kürzesten Weg in T und dem euklidischen Abstand gemeint ist. Über diese Triangulierungen ist bisher sehr wenig bekannt, und es soll untersucht werden, ob sich lokale Eigenschaften identifizieren lassen, die bei der Entwicklung von Heuristiken zu ihrer Berechnung helfen können.

Eine andere optimale Triangulierung, die betrachtet werden soll, ist die minimale Gewichtstriangulierung, welche die Summe aller Kantenlängen in T minimiert. Obwohl effiziente und in der Praxis sehr wirkungsvolle Heuristiken zur Berechnung der minimalen Gewichtstriangulierung bekannt sind, ist die komplexitätstheoretische Status dieses Problems bis heute ungeklärt. Es soll untersucht werden, ob sich bestimmte Konfigurationen von Punkten finden lassen, mit deren Hilfe sich die NP-Vollständigkeit dieses Problems nachweisen lässt.

Projekt: Fluoroskopiebasierte, virtuelle Navigation in der Neurochirurgie

Helmut Alt, Christian Knauer, Robert Günzler, Frank Hoffmann, Klaus Kriegel.

Dieses Projekt ist eine Forschungskooperation des Instituts für Informatik der FU Berlin mit der Firma Schaerer-Mayfield-Technologies.

Bei neurochirurgischen Eingriffen an der Wirbelsäule wird die Fluoroskopie als bildgebendes Verfahren eingesetzt, um die räumliche Lage von chirurgischen Instrumenten und Operationsmaterialien (Nägel oder Schrauben) zu erkennen und im Bedarfsfall zu korrigieren. Als Aufnahmegeräte dienen mobile Röntgengeräte, sogenannte C-Bögen. In der bisherigen Praxis müssen solche Aufnahmen während einer OP häufig wiederholt werden, teilweise werden ganze Arbeitsabläufe wie das Ausrichten einer Schraube unter Bestrahlung ausgeführt. Das führt zu einer hohen Strahlenbelastung für den Patienten und den Operateur sowie zu Zeitverlusten durch die Unterbrechung des eigentlichen OP-Verlaufs.

Ziel des Projekts ist die Entwicklung einer Methode zur Vermeidung dieser Nachteile. Da bei dieser Technik Instrumente und Materialien mit algorithmischen Methoden in vorher aufgenommene Fluoroskopiebilder projiziert werden, spricht man von einer virtuellen Navigation. Wichtigstes Hilfsmittel zur Realisierung diese Ziels ist ein Trackingsystem, mit dem die Position und Orientierung von chirurgischen Instrumenten im OP-Feld ständig gemessen wird. Die Grundidee besteht darin, das zu behandelnde anatomische Objekt (z.B. ein Wirbelkörper) und das chirurgische Instrument gleichzeitig mit dem Trackingsystem zu erfassen und somit ihre relative Lage zueinander zu bestimmen. Kennt man zusätzlich die die relative Lage des C-Bogens zum anatomischen Objekt während der Aufnahme, ist die Projektion des Instruments in das Bild eine einfache Aufgabe. Das noch zu lösende Problem besteht also in der Bestimmung der relativen Lage des C-Bogens zum anatomischen Objekt. Von Joskowicz et al. wurde eine Methode beschrieben, bei der die Positionen des C-Bogens und des Objekts direkt mit den Trackingsystem gemessen werden. Der Vorteil, das Problem auf eine algorithmisch gut beherrschbare Aufgabe zu reduzieren, die man in Realzeit lösen kann, wird durch einen höheren Anspruch an die technische Realisierung erkauft: Das direkte Tracken des C-Bogens ist für elektromagnetische Systeme problematisch, da deren Messgenauigkeit nur im unmittelbaren OP-Feld optimal ist. Bei der Verwendung von optischen Systemen ist der Bewegungsraum des C-Bogens durch Sichtbarkeitsprobleme eingeschränkt. Darüber hinaus addieren sich die Fehler von zwei Messungen, nämlich am C-Bogen und am Objekt.

Die in diesem Projekt entwickelte Herangehensweise vereinfacht die technische Umsetzung mit Hilfe einer aufwendigeren algorithmischen Lösung. Sie basiert auf einem speziell entworfenen 3-dimensionalen Punktmuster, dem sogenannten Phantom, das während der Bildakquisition in einer bestimmten Position zum anatomischen Objekt befestigt wird. Das Design des Phantoms erlaubt es, seine Lage im Strahlengang aus der Projektion des Punktmusters im Bild zu berechnen. Dieser neuartige Zugang zeichnet sich durch ein hohes Maß an Flexibilität und Fehlertoleranz aus. Das Verfahren kann für beliebige C-Bögen eingesetzt werden. Es können optische und prinzipiell auch elektromagnetische Trackingsysteme eingesetzt werden (sofern die Messgenauigkeit letzterer nicht zu stark durch den C-Bogen eingeschränkt wird). Werden von den zehn Phantompunkten bis zu zwei nicht oder fehlerhaft detektiert, so kann dies erkannt und behandelt werden. Die Genauigkeit der berechneten, virtuellen Navigation hängt im Wesentlichen nur von der Messgenauigkeit des Trackingsystems ab. Die Position des zu behandelnden Wirbels im Raum muss dabei nicht als starr vorausgesetzt werden muss.

Projekt: Pseudotriangulierungen und Bewegungen von Gelenkssystemen

Günter Rote

Eine *Pseudotriangulierung* ist eine Zerlegung eines ebenen Bereichs in Polygone mit jeweils genau drei konvexen Ecken und beliebig vielen einspringenden Ecken (*Pseudodreiecke*), siehe Abbildung 1. Von besonderer Bedeutung sind die *gespitzten* Pseudotriangulierungen (pointed pseudotriangulations), wo an jeder Ecke ein Winkel $> 180°$ anliegt. Diese haben genau $n - 2$ Pseudodreiecke und $2n - 3$ Kanten, und dies ist die kleinste mögliche Anzahl für eine Pseudotriangulierung.

In jüngster Zeit hat man erkannt, dass Pseudotriangulierungen viele wünschenswerte Eigenschaften haben und auch bei der Untersuchung der Bewegung von Gelenkssystemen, wie sie etwa bei der Bewegungsplanung von Robotern auftreten, eine wesentliche Rolle spielen. Sie werden auch als Datenstrukturen, insbesondere für die Simulation dynamischer Bewegungen, verwendet.

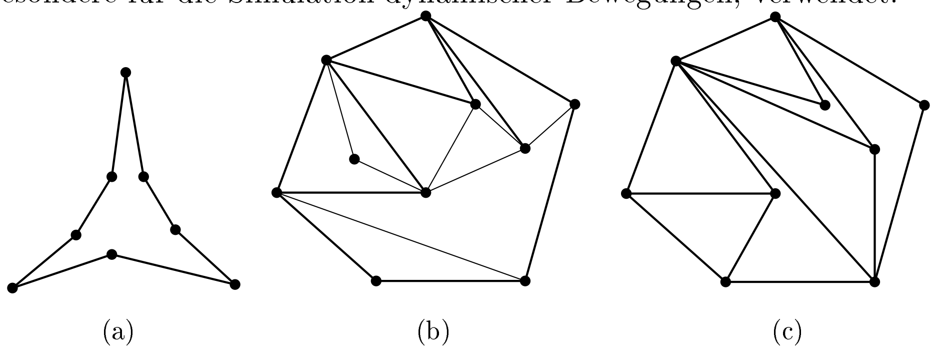


Abbildung 1: (a) ein Pseudodreieck (b) eine Pseudotriangulierung (c) eine gespitzte Pseudotriangulierung

Ein *Fachwerk* (Stabwerk, Gelenkssystem, framework, linkage) besteht aus Stäben fester Länge, die an den Ecken durch bewegliche Gelenke miteinander verbunden sind. Die Untersuchung der Starrheit oder Beweglichkeit solcher Systeme, sowohl in der Ebene als auch im Raum ist ein Grundproblemen der Statik, das in erster Näherung mit Methoden der linearen Algebra lösbar ist. Viele Aussagen über Starrheit lassen sich aber allein auf Grund der kombinatorischen Struktur, das heißt, auf Grund des darunterliegenden Graphen machen. Das Kriterium von Laman (1971) charakterisiert zum Beispiel minimal starre Graphen in der Ebene folgendermaßen:

> Ein *Laman-Graph* ist ein Graph mit n Knoten und $2n-3$ Kanten, wobei jeder Untergraph mit $k \geq 2$ Knoten höchstens $2k-3$ Kanten enthält.

Diese Graphen sind genau jene Graphen, die bei jeder Einbettung in genügend „allgemeiner“ Lage starr sind, die aber bei Entfernung einer beliebigen Kante beweglich werden (siehe Abbildung 2).
Das sogenannte *Zollstockproblem* (carpenter's rule problem) fragt nach einer Bewegung, die ein Gelenksystem in Form eines ebenen Streckenzugs *ohne Selbstüberschneidungen* gerade macht. Derartige Fragestellungen wurden seit einiger Zeit in der algorithmischen Geometrie, aber auch im Hinblick auf Anwendungen in der Knotentheorie, Robotik (Bewegung von Roboterarmen), Fertigungstechnik (Biegen von Drähten oder Rohrleitungen) der Polymerphysik und Biophysik untersucht (Molekülfaltung). Das Zollstockproblem ist dabei

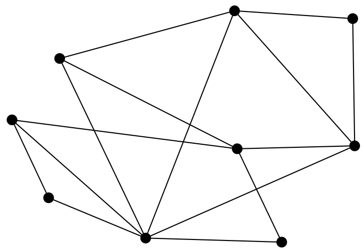


Abbildung 2: Ein minimal starrer Graph

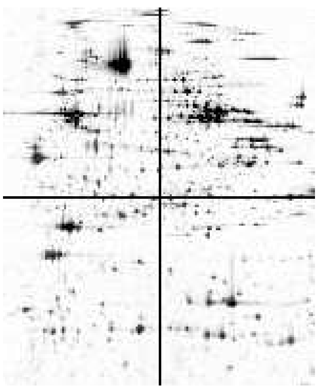
sicher nur ein grundlegendes Problem, das keine direkten Anwendungen hat. Es wurde jüngst von Connelly, Demaine, und Rote in der Richtung gelöst, dass es eine solche „öffnende“ Bewegung immer gibt. In ähnlicher Weise kann ein geschlossener Streckenzug (ein Polygon) immer konvex gemacht werden.
Die Hauptidee beim Beweis dieser Aussage ist, *expansive* Bewegungen zu betrachten, bei denen die Abstände zwischen je zwei Punkten nicht abnehmen. Man kann von der Anwendung, Polygone zu öffnen, abstrahieren und den durch die Expansionseigenschaft definierten *Expansionskegel* aller expansiven Bewegungen einer Punktmenge für sich betrachten. Seine extremen Strahlen stehen wieder in enger Beziehung zu den Pseudotriangulierungen.
In diesem Projekt sollen neue Erkenntnisse über Pseudotriangulierungen, Starrheit und Beweglichkeit von Gelenkssystemen (Fachwerken), und Anwendungen von Pseudotriangulierungen als Datenstrukturen gewonnen werden.
Ein weiteres Ziel ist es, analoge Strukturen im *Raum* zu finden. Dies wäre zum Beispiel wichtig als kinetische Datenstruktur für dynamische Bewegungssimulationen. Derzeit gibt es einige einfache Ansätze, aber noch keine zufriedenstellende Definition dafür, was eine höherdimensionale „Pseudotriangulierung“ sein könnte.

Projekt: Point-Pattern-Matching zur Analyse von Gelbildern

Helmut Alt, Darko Dimitrov, Frank Hoffmann, Klaus Kriegel.
Das derzeitige Projekt geht aus einer Forschungskooperation des Instituts für Informatik der FU Berlin und des Deutschen Herzzentrums Berlin hervor. Die-

ses ursprüngliche Projekt wurde bis Juni 2001 von der DFG gefördert. Für Teile der dabei entwickelten Software wurde ein Lizensierungsvertrag mit der Firma Bio-Rad Laboratries abgeschlossen, der eine 2-jährige Weiterfinanzierung der Forschung und Softwareentwicklung sichert.

Gegenstand der Untersuchung sind 2-dimensionale Gelbilder, die durch Gelelektrophorese - Techniken erzeugt werden. Die 1975 von O'Farrell eingeführte Gelelektrophorese hat sich als eine zentrale molekularbiologische Methode zur hochauflösenden Trennung von Protein-Gemischen und zur Analyse der Protein-Zusammensetzung von Gewebeproben etabliert. Jeder Punkt ("Spot") in einem so erzeugten Gelbild repräsentiert ein in der Probe auftretendes Protein. Das Original des hier verkleinert abgebildeten Herz-Ventricle-Gels enthält ca. 2000 Spots. Ziel der Analyse der Bilder ist es insbesondere, krankheitsassoziierte Proteinausprägungen zu erkennen. Zwar ist es möglich, einzelne Proteine durch Sequenzierung zu bestimmen, dies ist aber sehr teuer und aufwendig und bei der Menge der Daten nicht realistisch. Deshalb basierte bis vor wenigen Jahren die Auswertung der Gelbilder zu großen Teilen auf der genauen (und zeitaufwendigen) Betrachtung durch erfahrene Spezialisten.



Inzwischen gibt es eine Reihe von Softwarepaketen zur Unterstützung dieser Arbeit, aber an einer hochzuverlässigen und vollautomatischen Lösung des Problems wird überall noch gearbeitet.

Im Projekt werden zwei der zentralen algorithmischen Probleme der Gelanalyse untersucht:
1) **Spotdetektion:** Im allgemeinen konzentrieren sich die Moleküle eines Proteins aus der Probe in einer achsenparllelen elliptischen Region des Gels - dem Spot des Proteins. Bei der Spotdetektion geht es um die Erkennung dieser Regionen. Das ist eine relativ einfache Bildverarbeitungsaufgabe, so lange die Spots gut separiert sind. Wenn sich mehrere Spots zu einer komplexen und übersättigten Region überlappen, ergibt sich ein schwieriges algorithmisches Problem, das mit Approximationsalgorithmen bearbeitet wird.
2) **Gelmatching:** Hier setzt man voraus, dass zwei zu vergleichende Bilder durch die Spotdetektion schon in geometrische Punktmuster umgewan-

delt wurden und nun ein geometrisches Matching dieser Punktmuster gesucht wird. Die besondere Schwierigkeit ergibt sich durch die technologisch bedingten, geometrischen Verzerrungen in den Bildern. Durch die Komplexität der Gelelektrophorese an sich, sind schon von ein und derselben Probe in einem Labor keine zwei identischen Bilder zu erwarten. Die zu entwickelnden Verfahren müssen daher sehr robust sein, um auch den Vergleich von Bildern aus verschiedenen Datenbanken zu ermöglichen. Mit Ansätzen aus der algorithmischen Geometrie konnte ein neuartiger Lösungsweg für dieses Problem entwickelt und implementiert werden, der den Kern des Programmsystem CAROL bildet (`http://gelmatching.inf.fu-berlin.de`).

4 Die Arbeitsgruppe Theoretische Informatik

Leiter

• Prof. Dr. Helmut Alt
Entwurf und Analyse von Algorithmen, insbesondere Algorithmische Geometrie mit Schwerpunkt Formanalyse.

• Prof. Dr. Günter Rote
Algorithmische Geometrie, kombinatorische Optimierung.

• Prof. Dr. Christian Knauer
Algorithmische Geometrie, Implementierung von geometrischen Algorithmen, Ähnlichkeitsbestimmung von geometrischen Figuren.

Mitglieder der Arbeitsgruppe

• Hosam Abdo
Algorithmische Geometrie.

• Britta Broser
Kombinatorik, Geometrie und Optimierung.

• Kevin Buchin
Algorithmische Geometrie.

• Maike Buchin
Algorithmische Geometrie.

• Darko Dimitrov
Bildverarbeitung, Computersehen, Flächenrekonstruktion aus dreidimensionalen Punktdaten.

• Panos Giannopoulos
Algorithmische Geometrie.

• Dr. Frank Hoffmann
Algorithmische Geometrie, geometrische Online-Probleme, angewandte Matching-Probleme.

• Oliver Klein
Algorithmische Geometrie, Mustererkennung.

- Claudia Klost
Algorithmische Geometrie.

- PD Dr. Klaus Kriegel
Graphalgorithmen und graphentheoretische Methoden für geometrische Probleme.

- Tobias Lenz
Algorithmische Geometrie, algorithmische Topologie.

- Wolfgang Mulzer
Algorithmische Geometrie

- Ares Ribó Mor
Geometrie, Kombinatorik.

- Ludmila Scharf
Algorithmische Geometrie.

- Andre Schulz
Algorithmische Geometrie, Pseudotriangulierungen.

- Astrid Sturm
Algorithmische Geometrie von Kurven und Flächen.

Weitere Informationen

Prof. Dr. Helmut Alt
Takustr. 9
Raum 112
Tel.: 838-75160
alt@inf.fu-berlin-de

Prof. Dr. Günter Rote
Takustr. 9
Raum 110
Tel.: 838-75150
rote@inf.fu-berlin.de

PD Dr. Klaus Kriegel
Takustr. 9
Raum 115
Tel.: 838-75156
kriegel@inf.fu-berlin.de

Prof. Dr. Christian Knauer
Takustr. 9
Raum 114
Tel.: 838-75165
knauer@inf.fu-berlin-de