РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

На правах рукописи
УДК 517.9

Гуревич Павел Леонидович

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ И ПОЛУГРУППЫ ФЕЛЛЕРА

01.01.02 — дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва—2008

Работа выполнена на кафедре «Дифференциальные уравнения и математическая физика» Российского университета дружбы народов.

Научный консультант: доктор физико-математических наук, профессор А. Л. Скубачевский.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор М. С. Агранович,

доктор физико-математических наук, профессор В. А. Кондратьев,

доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН С. И. Похожаев.

Ведущая организация: Московский энергетический институт (технический университет).

Защита диссертации состоится 14 октября 2008 г. в ч. мин. на заседании диссертационного совета Д.212.203.27 в Российском университете дружбы народов по адресу: 117923, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, ауд.

С диссертацией можно ознакомиться в Учебно-научном информационном библиотечном центре (Научной библиотеке Российского университета дружбы народов) по адресу: 117419, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6.

Автореферат разослан 2008 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук, доцент Л. Е. Россовский.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Диссертация посвящена следующим взаимосвязанным вопросам: разрешимости и гладкости решений эллиптических уравнений с нелокальными краевыми условиями и существованию полугрупп Феллера, возникающих в теории многомерных диффузионных процессов.

Обыкновенные дифференциальные уравнения с нелокальными условиями, возникающие в гидродинамике, рассматривал еще А. Зоммерфельд[1]. Впоследствии нелокальные задачи в одномерном случае изучали В. А. Ильин, Е. М. Моисеев, А. Крол, М. Пиконе, А. Л. Скубачевский, Я. Д. Тамаркин, А. А. Шкаликов и др.

В 1932 г. Т. Карлеман[2] рассмотрел задачу о нахождении голоморфной функции в ограниченной области G, удовлетворяющей следующему условию: значение неизвестной функции в каждой точке y границы ∂G связано со значением в точке $\Omega(y)$, где $\Omega : \partial G \to \partial G$ — гладкое невырожденное преобразование, $\Omega(\Omega(y)) = y$, $y \in \partial G$. В работе Т. Карлемана эта задача сводится к сингулярному интегральному уравнению со сдвигом. С такой постановкой задачи связаны дальнейшие исследования сингулярных интегральных уравнений со сдвигом, отображающим границу области на себя и порождающим конечную группу (подробную библиографию можно найти, например, в книге Н. И. Мусхелишвили[3]), а также работы, в которых изучаются эллиптические уравнения, содержащие сдвиг области на себя (см. монографию А. Б. Антоневича и А. В. Лебедева[4]). Эллиптические уравнения с абстрактными нелокальными краевыми условиями изучались в работах Р. Билза, Ф. Браудера, М. И. Вишика, М. Шехтера. При этом на абстрактные операторы налагались условия, гарантирующие выполнение неравенства коэрцитивности. В ряде случаев накладывались ограничения на сопряженный оператор.

В 1969 г. А. В. Бицадзе и А. А. Самарский[5] рассмотрели принципиально иную нелокальную эллиптическую задачу, возникающую в теории плазмы: ищется гармоническая в ограниченной области G функция, удовлетворяющая нелокальным условиям, связывающим значения искомой функции на многообразии $\Gamma_1 \subset \partial G$ со значениями на некотором многообразии, лежащем внутри области G; на множестве $\partial G \setminus \Gamma_1$ ставится условие Дирихле. В случае прямоугольной области эта задача была решена в указанной работе А. В. Бицадзе и А. А. Самарского сведением к интегральному уравнению Фредгольма второго рода и применением принципа максимума. В случае произвольной области и общих нелокальных условий задача была сформулирована как нерешенная[6] (укажем также работу А. Крола[7], в которой отмечена важность развития теории нелокальных краевых задач).

Различные варианты и обобщения нелокальных задач, которые содержат преобразования переменных, отображающие границу в замыкание области, рассматривали А. В. Бицадзе, А. К. Гущин, Н. В. Житарашу, В. А. Ильин, К. Ю. Кишкис, В. П. Михайлов, Е. И. Моисеев, Б. П. Панеях, Я. А. Ройтберг, А. П. Солдатов, З. Г. Шефтель, С. Д. Эйдельман и др.; при этом особое внимание уделялось разрешимости нелокальных задач. Спектральные свойства нелокальных задач в многомерном случае исследовались Е. И. Моисеевым, М. А. Мустафиным и др. Отметим, что в работах перечисленных авторов изучается либо двумерный

---

[1] *Sommerfeld A.* Ein Beitrag zur hydrodinamischen Erklärung der turbulenten Flussigkeitsbewegungen// Proc. Intern. Congr. Math. (Rome, 1908). Vol. III. — Roma: Reale Accad. Lincei, 1909. — P. 116–124.

[2] *Carleman T.* Sur la théorie des equations integrales et ses applications// Verhandlungen des Internat. Math. Kongr. Zürich. 1932. — *1*. — P. 138–151.

[3] *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Физматгиз, 1962.

[4] *Antonevich A., Lebedev A.* Functional Differential Equations: I. C^*-theory — Pitman Monographs and Surveys in Pure and Appl. Math. — *70*. — Harlow: Longman Scientific & Technical, 1994.

[5] *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач// Докл. АН СССР. — 1969. — *185*, № 4. — С. 739–740.

[6] *Самарский А. А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений// Дифференц. уравнения. — 1980. — *16*, № 11. — С. 1925–1935.

[7] *Krall A. M.* The development of general differential and general differential-boundary systems// Rocky Mountain J. of Math. — 1975. — *5*. — P. 493–542.

случай, либо уравнения второго порядка, либо накладываются достаточно жесткие условия на геометрию носителя нелокальных членов (например, предполагается, что носитель нелокальных членов лежит внутри области или имеет пересечение только с той частью границы, где задано «локальное» условие Дирихле).

Основы теории для линейных эллиптических уравнений порядка $2m$ с нелокальными краевыми условиями общего вида были заложены в работах А. Л. Скубачевского и его учеников[8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17]: приведена классификация по типу нелокальных условий, доказаны априорные оценки и построены правый и левый регуляризаторы в пространствах Соболева или весовых пространствах (в зависимости от типа нелокальных условий), а также получена асимптотика решений вблизи точек сингулярности. Для ряда задач изучены спектральные свойства и свойства индекса соответствующих операторов. В частности, было показано, что свойства задачи существенным образом зависят от геометрии носителя нелокальных членов. Проиллюстрируем возможные случаи на следующем примере.

Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ — ограниченная область с границей $\partial G = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \mathcal{K}$, где Γ_σ — открытые связные (в топологии ∂G) $(n-1)$-мерные многообразия класса C^∞, $\mathcal{K} = \overline{\Gamma_1} \cap \overline{\Gamma_2}$ — $(n-2)$-мерное связное многообразие без края класса C^∞ (если $n = 2$, то $\mathcal{K} = \{g_1, g_2\}$, где g_1, g_2 — концы кривых $\overline{\Gamma_1}$, $\overline{\Gamma_2}$). Пусть в окрестности каждой точки $g \in \mathcal{K}$ область G диффеоморфна n-мерному двугранному (плоскому, если $n = 2$) углу. Рассмотрим в области G нелокальную задачу

$$\Delta u = f_0(y) \quad (y \in G), \tag{1}$$

$$u|_{\Gamma_\sigma} - b_\sigma(y) u(\Omega_\sigma(y))|_{\Gamma_\sigma} = 0 \quad (\sigma = 1, 2). \tag{2}$$

Здесь $b_\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$; Ω_σ — бесконечно дифференцируемые невырожденные преобразования, отображающие некоторую окрестность $\mathcal{O}_\sigma$ многообразия Γ_σ на множество $\Omega_\sigma(\mathcal{O}_\sigma)$ так, что $\Omega_\sigma(\Gamma_\sigma) \subset G$. Точки множества $\mathcal{K}$ назовем *точками сопряжения нелокальных условий*.

В работах А. Л. Скубачевского предложена следующая классификация:

1. $\Gamma_2 = \varnothing$ и $\Omega_1(\Gamma_1) = \Omega_1(\partial G) \subset G$ (рис. 1);

2. $\Gamma_2 \neq \varnothing$ и $\Omega_\sigma(\overline{\Gamma_\sigma}) \cap \mathcal{K} = \varnothing$, $\sigma = 1, 2$ (рис. 2);

3. $\Gamma_2 \neq \varnothing$ и $\Omega_\sigma(\overline{\Gamma_\sigma}) \cap \mathcal{K} \neq \varnothing$, $\sigma = 1$ или 2 (рис. 3).

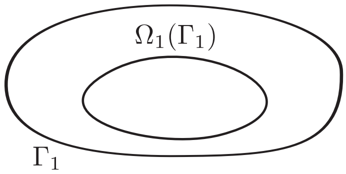


Рис. 1: Область G с границей $\partial G = \Gamma_1$.

[8] *Скубачевский А. Л.* Нелокальные эллиптические задачи с параметром// Матем. сб. — 1983. — *121* (*163*), № 2 (6). — С. 201–210.

[9] *Скубачевский А. Л.* Эллиптические задачи с нелокальными условиями вблизи границы// Матем. сб. — 1986. — *129* (*171*), № 2. — С. 279–302.

[10] *Скубачевский А. Л.* Модельные нелокальные задачи для эллиптических уравнений в двугранных углах// Дифференц. уравнения. — 1990. — *26*, № 1. — С. 120–131.

[11] *Скубачевский А. Л.* О методе срезающих функций в теории нелокальных задач// Дифференц. уравнения. — 1991. — *27*, № 1. — С. 128–139.

[12] *Skubachevskii A. L.* On the stability of index of nonlocal elliptic problems// J. Math. Anal. Appl. — 1991. — *160*, № 2. — P. 323–341.

[13] *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional differential equations and applications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1997.

[14] *Подъяпольский В. В.* Полнота и базисность по Абелю системы корневых функций одной нелокальной задачи// Дифференц. уравнения. — 1999. — *35*, № 4. — С 568–569.

[15] *Ковалева О. А., Скубачевский А. Л.* Разрешимость нелокальных эллиптических задач в пространствах с весом// Матем. заметки. — 2000. — *67*, № 6. — С. 882–898.

[16] *Skubachevskii A. L.* Regularity of solutions for some nonlocal elliptic problem// Russ. J. Math. Phys. — 2001. — *8*. — P. 365–374.

[17] *Скубачевский А. Л.* О разрешимости нелокальных задач для эллиптических систем в бесконечных углах// Докл. АН. — 2007. — *412*, № 3. — С. 317–320.

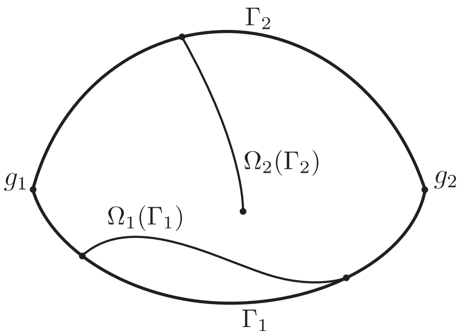


Рис. 2: $\Omega_\sigma(\overline{\Gamma_\sigma}) \cap \mathcal{K} = \varnothing$.

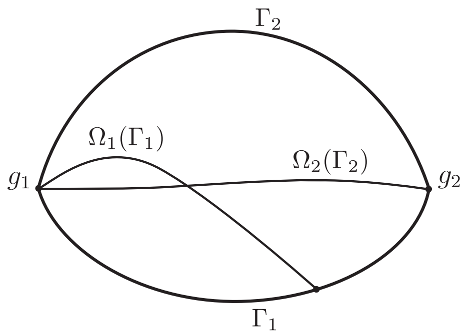


Рис. 3: $\Omega_\sigma(\overline{\Gamma_\sigma}) \cap \mathcal{K} \neq \varnothing$.

Первый класс задач является наиболее изученным: свойства нелокальной задачи во многом близки к свойствам соответствующей «локальной» задачи (когда $b_\sigma(y) \equiv 0$). В частности, нелокальная задача фредгольмова в обычных пространствах Соболева и ее индекс равен индексу «локализованной» задачи, а соответствующая задача со спектральным параметром однозначно разрешима при достаточно больших значениях параметра (см.[8, 13]). В случае когда спектр локальной задачи дискретный, нелокальная задача также имеет дискретный спектр, а система ее корневых функций образует базис Абеля в соответствующем пространстве Соболева (см.[14]).

Существенно более сложная ситуация имеет место для второго и третьего классов. Для второго класса нелокальных задач кривая $\Omega_\sigma(\overline{\Gamma_\sigma})$ может пересекаться (в том числе касаться) границы области, а в более общем случае даже частично совпадать с границей. Для третьего класса задач считаем, что подход носителя нелокальных членов к границе области в точках сопряжения некасательный, что существенно для используемого в диссертации метода. Оказывается (см.[9, 16]), в случае пересечения носителя нелокальных членов с границей области решения могут иметь степенные особенности вблизи точек сопряжения краевых условий даже в случае бесконечно гладкой границы и бесконечно дифференцируемой правой части. Поэтому такие задачи рассматривались ранее в специальных весовых пространствах, учитывающих возможные особенности решений. Наиболее удобными при этом оказались пространства В. А. Кондратьева, введенные им при исследовании «локальных» краевых задач в областях с угловыми или коническими точками. В работах[9, 10, 11, 15] доказана фредгольмова разрешимость нелокальных задач в пространствах В. А. Кондратьева, а в работе[12] показано, что если носитель нелокальных членов не пересекается с точками сопряжения краевых условий (рис. 2), то индекс нелокальной задачи равен индексу соответствующей локальной; в противном случае (рис. 3) это, вообще говоря, уже неверно.

Нелокальные задачи с касательным подходом кривой $\Omega_\sigma(\overline{\Gamma_\sigma})$ к границе области в точках сопряжения краевых условий в отдельных случаях изучались в работах[18, 19] методами теории функций комплексного переменного, однако общая теория в этом случае не развита.

Независимо от упомянутых работ, нелокальные эллиптические задачи возникли в теории многомерных диффузионных процессов, описывающих с вероятностной точки зрения поведение частицы в области G. В работах[20, 21] В. Феллер показал, что всякому одномерному ($n = 1$) диффузионному процессу соответствует некоторая сильно непрерывная неотрицательная сжимающая полугруппа в пространстве $C(\overline{G})$ или некотором его подпространстве. Впоследствии такие полугруппы получили название *полугрупп Феллера*. Кроме того, В. Феллер получил необходимые и достаточные условия того, что обыкновенный дифференциальный оператор второго порядка является генератором (инфинитезимальным производящим

[18]*Кишкис К. Ю.* К теории нелокальных задач для уравнения Лапласа// Дифференц. уравнения. — 1989. — *25*, № 1. — С. 59–64.

[19]*Бицадзе А. В.* Об одном классе условно разрешимых нелокальных краевых задач для гармонических функций// Докл. АН СССР. — 1985. — *280*, № 3. — С. 521–524.

[20]*Feller W.* The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations// Ann. Math. — 1952. — *55*. — P. 468–519.

[21]*Feller W.* Diffusion processes in one dimension// Trans. Amer. Math. Soc. — 1954. — *77*. — 1–30.

оператором) указанной полугруппы. Полученные им краевые условия, задающие область определения оператора, являются нелокальными.

В многомерном случае ($n \geqslant 2$) общий вид генератора полугруппы Феллера был получен А. Д. Вентцелем[22]. Им было доказано, что генератор полугруппы Феллера есть эллиптический дифференциальный оператор второго порядка (возможно, с вырождением), область определения которого состоит из непрерывных (один или два раза непрерывно дифференцируемых, в зависимости от процесса) функций, удовлетворяющих нелокальным краевым условиям. Нелокальное слагаемое представляет собой интеграл от функции по замыканию области относительно неотрицательной борелевской меры $\mu(y, d\eta)$, $y \in \partial G$.

В наиболее сложном случае, когда мера атомарна, нелокальные условия могут принимать вид (2). Их вероятностный смысл таков: частица, попадая в точку $y \in \Gamma_\sigma$, может через некоторое случайное время с вероятностью b_σ ($0 \leqslant b_\sigma \leqslant 1$) оказаться в точке $\Omega_\sigma(y)$ (такое поведение частицы называют "скачком"), либо с вероятностью $1 - b_\sigma$ поглотиться границей — в этом случае процесс завершается.

В общем случае краевые условия содержат производные от неизвестной функции до второго порядка включительно, что соответствует, помимо поглощения, отражению частицы от границы области, диффузии вдоль границы и явлению вязкости.

Следующая задача остается при $n \geqslant 2$ нерешенной. Пусть задан эллиптический интегро-дифференциальный оператор, область определения которого описывается нелокальными краевыми условиями общего вида[22]. Будет ли такой оператор (или его замыкание) генератором полугруппы Феллера?

Различают два класса нелокальных краевых условий: *трансверсальные* и *нетрансверсальные*. В трансверсальном случае порядок нелокальных членов меньше порядка локальных, тогда как в нетрансверсальном порядки совпадают. Трансверсальный случай изучали Дж. М. Бони, С. Ватанабе, Й. Ишикава, П. Кореджи и П. Приоре, К. Сато и Т. Уено, К. Таира и многие другие. В работах А. Л. Скубачевского был предложен метод изучения более сложного нетрансверсального случая[23]. Этот метод основан на использовавшейся ранее в теории нелокальных задач идее отделения нелокальных членов от локальных граничных операторов[8, 9] и теореме Хилле—Иосиды. Впоследствии метод был развит в работах Е. И. Галахова и А. Л. Скубачевского.

Помимо приложений нелокальных эллиптических задач к теории плазмы и теории диффузионных процессов, укажем на важные приложения, возникающие в теории функционально-дифференциальных уравнений[13], теории параболических задач с нелокальными краевыми условиями[24], в авиационно-космической технике при моделировании многослойных пластин и оболочек[13, 25, 26], в задачах терморегуляции при описании процессов в химических реакторах и системах климат-контроля[27, 28], а также в теории управления[29]. Кроме того, отметим монографию А. Бенсусана и Ж.-Л. Лионса[30], где, в частности, рассматриваются эллиптические интегро-дифференциальные операторы в связи с вопросами стохастической теории

[22] *Вентцель А. Д.* О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов// Теор. вероятн. и ее применения. — 1959. — *4*, № 2. — С. 172–185.

[23] *Скубачевский А. Л.* О некоторых задачах для многомерных диффузионных процессов// Докл. АН СССР. — 1989. — *307*, № 2. — 287–291.

[24] *Shamin R. V.* Nonlocal parabolic problems with the support of nonlocal terms inside a domain// Funct. Differ. Equ. — 2003. — *10*, № 1-2. — P. 307–314.

[25] *Онанов Г. Г., Скубачевский А. Л.* Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами в стационарных задачах механики деформируемого тела// Прикладная механика. — 1979. — *15*, № 5. — С. 39–47.

[26] *Onanov G. G., Tsvetkov E. L.* On the minimum of the energy functional with respect to functions with deviating argument in a stationary problem of elasticity theory// Russ. J. Math. Phys. — 1995. — *3*, № 4. — P. 491–500.

[27] *Colli P., Grasselli M., Sprekels J.* Automatic control via thermostats of a hyperbolic Stefan problem with memory// Appl. Math. Optim. — 1999. — *39*. — P. 229–255.

[28] *Гуревич П. Л., Егер В., Скубачевский А. Л.* О существовании периодических решений некоторых нелинейных задач термоконтроля// Докл. АН. — 2008. — *418*, № 2. — С. 151-154.

[29] *Amann H.* Feedback stabilization of linear and semilinear parabolic systems// In: Proceedings of "Trends in Semigroup Theory and Applications," Trieste, Sept. 28 — Oct. 2, 1987. — Lect. Notes Pure Appl. Math. — 1989. — *116*. — С. 21–57.

[30] *Bensoussan A., Lions J. L.* Impulse Control and Quasi-Variational Inequalities. — Paris: Gauthier-Villars, 1984.

управления.

В последнее время развивается также теория нелокальных нелинейных уравнений и неравенств и ее приложения. В этой связи упомянем статью[31], в которой изучаются дифференциальные неравенства с нелокальными слагаемыми (там же можно найти ссылки на работы других авторов).

Цель работы

Целью работы является изучение следующих взаимосвязанных вопросов:

1. разрешимость и гладкость решений эллиптических уравнений с нелокальными краевыми условиями в случае, когда носитель нелокальных членов имеет непустое пересечение с границей области;

2. существование полугрупп Феллера, возникающих в теории многомерных диффузионных процессов.

Основные результаты. Научная новизна

1. До сих пор в общей теории нелокальных эллиптических задач предполагалось, что преобразования переменных в нелокальных краевых условиях линейны вблизи точек сопряжения краевых условий, а именно представляют из себя композицию операторов сдвига, поворота и гомотетии.

   В работе изучена задача с нелинейными преобразованиями, которые не являются малыми или компактными возмущениями. Показано, что при переходе от линейных преобразований переменных к нелинейным оператор задачи в весовых пространствах В. А. Кондратьева остается фредгольмовым и его индекс не меняется.

2. В случае пересечения носителя нелокальных членов с границей области разрешимость нелокальных эллиптических задач в пространствах Соболева $W^{l+2m}(G) = W_2^{l+2m}(G)$ (где $2m$ — порядок эллиптического уравнения, $l \geqslant 0$ — целое) прежде не исследовалась. Основная трудность заключается в том, что решения нелокальной задачи могут иметь степенные особенности вблизи некоторых точек и, вообще говоря, не принадлежат «нужному» пространству Соболева.

   В диссертации показано, что фредгольмова разрешимость ограниченного оператора в пространствах Соболева $W^{l+2m}(G)$ определяется расположением собственных значений некоторой вспомогательной оператор-функции $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ ($\lambda \in \mathbb{C}$), соответствующей точкам сопряжения краевых условий, структурой жордановых цепочек, отвечающих этим собственным значениям, а также выполнением определенных алгебраических соотношений между эллиптическим оператором и операторами в нелокальных краевых условиях.

3. Ранее вопрос о фредгольмовости неограниченного нелокального оператора в $L_2(G)$ в случае подхода носителя нелокальных членов к границе области изучался лишь тогда, когда нелокальные условия заданы на сдвигах границы[32], или же в случае нелокального возмущения задачи Дирихле для уравнения второго порядка[33].

   В диссертационной работе доказано, что неограниченный оператор в $L_2(G)$, заданный на обобщенных решениях нелокальной задачи (функциях из $W^{\ell}(G)$, $0 \leqslant \ell \leqslant 2m-1$), оказывается фредгольмовым вне зависимости от расположения собственных

[31] *Митидиери Э., Похожаев С. И.* Теоремы типа Лиувилля для некоторых нелинейных нелокальных задач// Докл. АН. — 2004. — *399*, № 6. — С. 732–736.

[32] *Скубачевский А. Л.* Эллиптические задачи А. В. Бицадзе, А. А. Самарского// Докл. АН СССР. — 1984. — *278*, № 4. — С. 813–816.

[33] *Гущин А. К., Михайлов В. П.* О непрерывности решений одного класса нелокальных задач для эллиптического уравнения// Матем. сб. — 1995. — *186*, № 2. — С. 37–58.

значений оператор-функции $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. Кроме того, исследована устойчивость индекса оператора в $L_2(G)$ при возмущении эллиптического уравнения младшими членами и краевых условий нелокальными операторами.

4. В работе[34] рассматривался вопрос о гладкости вблизи угловой или конической точки обобщенных решений из пространства Соболева $W^m(G)$ эллиптического уравнения порядка $2m$ с условием Дирихле на границе. В частности, было доказано, что решения можно сделать сколь угодно гладкими за счет уменьшения раствора угла. Принципиально иная ситуация имеет место в случае нелокальных краевых условий. В работе[9] показано, что гладкость обобщенных решений может нарушаться вблизи гладкой границы или вершины малого угла. С другой стороны, наличие нелокальных членов с достаточно большими по модулю коэффициентами может обеспечить гладкость обобщенных решений вблизи вершины угла, большего π.

   В диссертационной работе изучена гладкость обобщенных решений из $W^\ell(G)$, $0 \leqslant \ell \leqslant 2m-1$, эллиптических уравнений порядка $2m$ с общими нелокальными условиями. Ряд результатов являются новыми даже в случае уравнения Пуассона.

5. Вопрос о существовании полугрупп Феллера в нетрансверсальном случае рассматривался в работах А. Л. Скубачевского при условии, что коэффициенты нелокальных операторов убывают при стремлении аргумента к границе области. В работах Е. И. Галахова и А. Л. Скубачевского изучены краевые условия в случае, когда коэффициенты при нелокальных членах вблизи точек сопряжения краевых условий меньше единицы. В этом случае нелокальную задачу (после сведения на границу) можно рассматривать в определенном смысле как возмущение «локальной» задачи Дирихле. Предельный случай, когда коэффициенты при нелокальных членах равны единице, до сих пор оставался неизученным.

   В работе исследованы нетрансверсальные нелокальные условия, допускающие этот предельный случай. Получены достаточные условия на борелевскую меру $\mu(y, d\eta)$ (носитель которой содержится в замыкании области), гарантирующие, что соответствующий нелокальный оператор будет генератором полугруппы Феллера. Изучены как ограниченные, так и неограниченные возмущения эллиптического оператора. Построены примеры несуществования полугруппы Феллера.

Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях линейных и нелинейных нелокальных эллиптических и параболических задач, краевых задач для дифференциально-разностных уравнений и многомерных диффузионных процессов. Результаты могут быть также применены для обоснования численных методов решения нелокальных задач, где существенную роль играет гладкость решений.

Апробация результатов

Результаты диссертационной работы излагались на семинаре в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН под руководством академика РАН С. М. Никольского и чл.-корр. РАН Л. Д. Кудрявцева; на семинарах механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова: под руководством М. И. Вишика, под руководством В. А. Кондратьева, под руководством А. И. Прилепко, под руководством А. А. Шкаликова; на семинаре в Российском университете дружбы народов под руководством А. Л. Скубачевского; на семинаре в Московском энергетическом институте под руководством Ю. А. Дубинского; на

[34] *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками// Тр. Моск. матем. общ. — 1967. — *16*. — С. 209–292.

семинаре университета им. Юстуса-Либига г. Гиссена (Германия) под руководством Х.-О. Вальтера; на семинаре университета г. Цюриха (Швейцария) под руководством Г. Амана; на семинаре университета г. Ла Рошеля (Франция) под руководством М. Киране; на семинаре университета г. Пуатье (Франция) под руководством А. Ружиреля; на семинаре университета г. Тулузы (Франция) под руководством Ю. Егорова; на семинаре университета г. Кардифа (Великобритания) под руководством В. Буренкова и В. Эванса; на семинаре университета г. Хайдельберга (Германия) под руководством В. Егера; на семинаре университета г. Карлсруэ (Германия) под руководством К. Винерса и Н. Нойс; на семинаре университета г. Ульма (Германия) под руководством В. Арендта и В. Балсера; на семинаре в Свободном университете г. Берлина (Германия) под руководством Б. Фидлера.

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в 26 работах, из них 14 статей в научных журналах и 12 тезисов докладов на международных конференциях. Все результаты совместной статьи [10], включенные в диссертацию, получены лично автором.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, шести глав и списка литературы (105 наименований). Общий объем диссертации составляет 290 страниц.

В гл. I исследуется нелокальная эллиптическая задача с нелинейными преобразованиями переменных в нелокальных краевых условиях. Показано, что при переходе от линейных преобразований переменных к нелинейным оператор задачи в весовых пространствах В. А. Кондратьева остается фредгольмовым и его индекс не меняется.

Главы II–VI посвящены свойствам решений эллиптических уравнений порядка $2m$ с нелокальными краевыми условиями: в гл. II и III изучаются сильные решения из пространств Соболева, в гл. IV и V — обобщенные решения из пространств Соболева, а в гл. VI, § 23, — решения в пространстве непрерывных функций. Соответствующие результаты базируются на разрешимости этой же задачи в весовых пространствах. Учитывая результаты гл. I, мы ограничиваемся рассмотрением преобразований переменных, линейных вблизи точек сопряжения краевых условий.

В гл. VI, §§ 24–26, исследуется вопрос о существовании полугрупп Феллера.

В работе рассматривается двумерный случай, однако отметим, что результаты гл. I о разрешимости нелокальных задач в весовых пространствах В. А. Кондратьева справедливы и в $\mathbb{R}^n$ при $n \geqslant 3$, когда граница области содержит особенности типа ребер. Также на n-мерный случай могут быть перенесены некоторые результаты, касающиеся гладкости обобщенных решений, подобно тому, как это сделано в работах В. А. Кондратьева (см., например,[35]). Для обобщения на n-мерный случай результатов о существовании полугрупп Феллера необходимо дальнейшее развитие теории нелокальных эллиптических задач: изучение асимптотики решений вблизи особенностей границы типа ребер, а также разрешимости в весовых пространствах и пространствах Соболева на основе $L_p(G)$, $p > 2$, и в пространствах Гельдера.

Содержание работы

Содержание диссертации для наглядности будет изложено на простейшем примере: нелокальном возмущении задачи Дирихле для оператора Лапласа. В диссертации аналогичные результаты доказаны для произвольных эллиптических уравнений порядка $2m$ с общими нелокальными условиями (за исключением гл. VI, где рассматриваются эллиптические уравнения второго порядка). О других обобщениях будет сказано по ходу изложения материала.

[35] *Кондратьев В. А.* Особенности решений задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка в окрестности ребра// Дифференц. уравнения. — 1977. — *13*, № 11. — 2026–2032.

Во введении описана постановка задачи, а также кратко изложено содержание диссертации по главам. Указаны цели диссертации, основные методы исследования, актуальность и научная новизна результатов.

Глава I. Нелокальные эллиптические задачи с нелинейными преобразованиями переменных

В гл. I исследуется эллиптическая задача с нелинейными преобразованиями переменных в нелокальных краевых условиях. Доказывается, что при переходе от линейных преобразований переменных к нелинейным оператор задачи в весовых пространствах В. А. Кондратьева остается фредгольмовым и его индекс не меняется.

Обозначим

$$K=\{y\in\mathbb{R}^2: r>0,\ \omega_1<\omega<\omega_2\},\quad \gamma_\sigma=\{y\in\mathbb{R}^2: r>0,\ \omega=\omega_\sigma\},\ \sigma=1,2,$$

где ω, r — полярные координаты точки y, $\omega_1<0<\omega_2$ и $\omega_2-\omega_1<2\pi$.

Через $\mathcal{O}_\varepsilon(0)$ обозначим ε-окрестность начала координат. Введем множества

$$K^\varepsilon=K\cap\mathcal{O}_\varepsilon(0),\quad \gamma_\sigma^\varepsilon=\gamma_\sigma\cap\mathcal{O}_\varepsilon(0),\ \sigma=1,2.$$

Пусть $G\subset\mathbb{R}^2$ ограниченная область с границей ∂G, содержащей начало координат. Считаем, что $\overline{G\cap\mathcal{O}_\varepsilon(0)}=\overline{K^\varepsilon}$ для некоторого $\varepsilon>0$, а в окрестности каждой точки $y\in\partial G\setminus\{0\}$ граница области G бесконечно гладкая.

В гл. I–V рассматривается нелокальная краевая задача (см. рис. 1.1)

$$\Delta u=f_0(y)\quad (y\in G), \tag{1.1}$$

$$\mathbf{B}u\equiv u|_{\partial G\setminus\{0\}}+\mathbf{B}^1u+\mathbf{B}^2u=g(y)\quad (y\in\partial G\setminus\{0\}), \tag{1.2}$$

где

$$\mathbf{B}^1u=\begin{cases} b_\sigma(y)u(\Omega_\sigma(y))|_{\gamma_\sigma^\varepsilon}, & y\in\gamma_\sigma^\varepsilon,\ \sigma=1,2,\\ 0, & y\in\partial G\setminus\mathcal{O}_\varepsilon(0);\end{cases}$$

$b_\sigma(y)$ — гладкие на $\overline{\gamma_\sigma^\varepsilon}$ функции с носителем в $\overline{\gamma_\sigma^{\varepsilon/2}}$ (вообще говоря, $b_1(0)\ne b_2(0)$); Ω_σ — заданные в некоторой окрестности $\gamma_\sigma^\varepsilon$ диффеоморфизмы такие, что $\Omega_\sigma(\gamma_\sigma^\varepsilon)\subset G$, $\Omega_\sigma(0)=0$ и кривые $\Omega_\sigma(\gamma_\sigma^\varepsilon)$ имеют некасательный подход к границе ∂G в начале координат; $\mathbf{B}^2u=\tilde{\mathbf{B}}^2\left(u|_{G\setminus\overline{\mathcal{O}_{\varkappa_1}(0)}}\right)$ $(\varkappa_1>0)$ — абстрактные нелокальные операторы, отвечающие нелокальным членам с носителем вне $\varkappa_1$-окрестности начала координат.

Для простоты изложения будем считать, что оператор $\mathbf{B}^2$ задан формулой

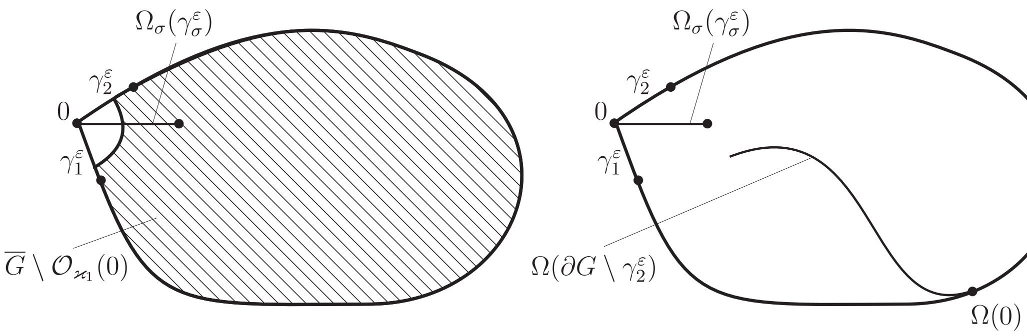
$$\mathbf{B}^2u(y)=b(y)u(\Omega(y))|_{\partial G\setminus\{0\}}, \tag{1.3}$$

где $b\in C^\infty(\partial G\setminus\{0\})$, сужение b на $\overline{\gamma_1^\varepsilon}$ — бесконечно дифференцируемая функция, $b|_{\gamma_2^\varepsilon}=0$ (вообще говоря, $\lim\limits_{y\in\gamma_1^\varepsilon,\, y\to 0} b(y)\ne 0$); преобразование Ω есть диффеоморфизм, заданный в некоторой окрестности ∂G, причем $\Omega(\partial G\setminus\{0\})\subset G$ и $\overline{\Omega(\partial G\setminus\{0\})}\subset\overline{G}\setminus\mathcal{O}_{\varkappa_1}(0)$.

Для любого $l\geqslant 0$ и любого $a\in\mathbb{R}$ обозначим через $H_a^l(G)$ пополнение множества бесконечно дифференцируемых в $\overline{G}$ функций с носителем в $\overline{G}\setminus\{0\}$ по норме

$$\|u\|_{H_a^l(G)}=\left(\sum_{|\alpha|\leqslant l}\int\limits_G \rho^{2(a-l+|\alpha|)}|D^\alpha u|^2dy\right)^{1/2},$$

где $\rho=\rho(y)=\operatorname{dist}(y,\{0\})$, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$, $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2$, $D^\alpha=D_{y_1}^{\alpha_1}D_{y_2}^{\alpha_2}$ и $D_{y_j}=-i\partial/\partial y_j$.



a) Абстрактный оператор $\mathbf{B}^2$ с носителем на $\overline{G} \setminus \mathcal{O}_{\varkappa_1}(0)$

b) Оператор $\mathbf{B}^2$ задан формулой (1.3)

Рис. 1.1: Задача (1.1), (1.2)

Для $l \geqslant 1$ обозначим через $H_a^{l-1/2}(\partial G \setminus \{0\})$ пространство следов на $\partial G \setminus \{0\}$ с нормой

$$\|g\|_{H_a^{l-1/2}(\partial G\setminus\{0\})} = \inf \|u\|_{H_a^l(G)} \quad (u \in H_a^l(G) : u|_{\partial G\setminus\{0\}} = g).$$

Аналогично вводятся пространства $H_a^l(K)$, $H_a^l(K^\varepsilon)$, $H_a^{l-1/2}(\gamma_\sigma)$, $H_a^{l-1/2}(\gamma_\sigma^\varepsilon)$.

Положим

$$\mathcal{H}_a^l(G, \partial G) = H_a^l(G) \times H_a^{l+3/2}(\partial G \setminus \{0\}),$$

где $a \in \mathbb{R}$ и $l \geqslant 0$ — целое число.

В гл. I исследуется фредгольмовость оператора

$$\mathbf{L} = (\Delta,\, \mathbf{B}) : H_a^{l+2}(G) \to \mathcal{H}_a^l(G, \partial G),$$

а также устойчивость его индекса при замене преобразований Ω_σ на преобразования, имеющие ту же линейную часть вблизи начала координат, что и Ω_σ.

Условие 1.1. *При $y \in \mathcal{O}_\varepsilon(0)$ преобразование Ω_σ имеет вид*

$$\Omega_\sigma : y \mapsto \mathcal{G}_\sigma y + o(|y|),$$

где $\mathcal{G}_\sigma$ композиция поворота на угол $-\omega_\sigma$ вокруг начала координат и гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом $\chi_\sigma > 0$, $\sigma = 1, 2$.

Таким образом, оператор $\mathcal{G}_\sigma$ переводит сторону γ_σ угла K в полупрямую $\{y \in \mathbb{R}^2 : r > 0,\ \omega = 0\}$, лежащую внутри угла K.

Условие 1.1 означает, в частности, что кривая $\Omega_\sigma(\overline{\gamma_\sigma^\varepsilon})$ подходит к границе ∂G в точке 0 некасательным образом.

В § 1 доказаны вспомогательные результаты из теории линейных операторов, а также даны определения функциональных пространств.

В § 2 рассматривается постановка нелокальной задачи (1.1), (1.2) в весовых пространствах в ограниченной области, а также модельной задачи в плоском угле. Там же вводится модельный оператор $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda) : W^{l+2}(\omega_1, \omega_2) \to W^l(\omega_1, \omega_2) \times \mathbb{C}^2$ $(\lambda \in \mathbb{C})$, который соответствует нелокальной задаче вблизи начала координат, записанной в полярных координатах ω, r (с последующим преобразованием Меллина $r \mapsto \lambda$). В случае задачи (1.1), (1.2) оператор $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ принимает вид

$$\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)\varphi = \{\varphi''(\omega) - \lambda^2\varphi(\omega),\ \varphi(\omega_\sigma) + b_\sigma(0)(\chi_\sigma)^{i\lambda}\varphi(0)\}.$$

Спектральные свойства оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ играют принципиальную роль при изучении разрешимости и гладкости решений задачи (1.1), (1.2). В частности, отметим, что собственные значения оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ образуют дискретное множество[10].

В § 3 изучаются свойства нелокальных операторов с нелинейными преобразованиями Ω_σ.

В § 4 доказана априорная оценка решений задачи (1.1), (1.2) и построен правый регуляризатор в весовых пространствах. Сформулируем основной результат гл. I, полагая, что $a > l+1$. В случае $a \leqslant l+1$ следует накладывать на оператор $\mathbf{B}^2$ условия согласования (ср. гл. III, § 9) или модифицировать весовые пространства.

Теорема 1.1. *Пусть выполнено условие* 1.1, *и пусть прямая* $\operatorname{Im}\lambda = a-l-1$, *где* $a > l+1$, *не содержит собственных значений оператора* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. *Тогда оператор* $\mathbf{L} : H_a^{l+2}(G) \to \mathcal{H}_a^l(G, \partial G)$ *фредгольмов.*

В заключение § 4 доказано, что индекс оператора $\mathbf{L}$ определяется линейной частью преобразований Ω_σ. Основная трудность в данной главе заключается в том, что оператор с нелинейными преобразованиями Ω_σ не является малым или компактным возмущением соответствующего оператора с линеаризованными преобразованиями.

Отметим, что результаты гл. I справедливы и в многомерном случае, когда граница области содержит особенности типа ребер.

Глава II. Сильные решения нелокальных эллиптических задач в плоских углах в пространствах Соболева

Главы II–VI посвящены исследованию свойств решений задачи (1.1), (1.2): в гл. II и III изучаются сильные решения из пространств Соболева, в гл. IV и V — обобщенные решения из пространств Соболева, а в гл. VI — решения в пространствах непрерывных функций. Соответствующие результаты базируются на разрешимости этой же задачи в весовых пространствах. Учитывая результаты гл. I, мы ограничимся рассмотрением преобразований Ω_σ, линейных вблизи начала координат. Далее будем считать выполненным следующее условие.

Условие 2.1. *При* $y \in \mathcal{O}_\varepsilon(0)$ *преобразование* Ω_σ *совпадает с линейным преобразованием* $\mathcal{G}_\sigma$ *из условия* 1.1.

Теоремы гл. II–VI доказаны для общего случая, когда на границе ∂G имеется конечное число угловых точек, которые делят ∂G на конечное число частей, причем на каждой из частей задано свое нелокальное краевое условие. Однако для простоты изложения будем рассматривать задачу (1.1), (1.2) в описанной выше области G.

В гл. II изучаются модельные нелокальные задачи в плоских углах. Соответствующие результаты используются в последующих главах при исследовании нелокальных задач в ограниченных областях.

В § 5 вводятся функциональные пространства. Через $W^s(\cdot) = W_2^s(\cdot)$ ($s \geqslant 0$ — целое или «целое+1/2») обозначим пространства Соболева; в дальнейшем нижний индекс «2» писать не будем. Через $W_{\mathrm{loc}}^l(G)$ обозначим множество, состоящее из всех распределений u на G таких, что $\xi u \in W^l(G)$ для любых $\xi \in C^\infty(G)$ с компактным носителем в G. Другие пространства будут введены по ходу изложения материала.

В § 6 рассматривается постановка нелокальной задачи (1.1), (1.2) в ограниченной области, а также модельных задач в плоских углах в пространствах Соболева:

$$\Delta u = f(y),\ y \in K, \qquad \mathbf{B}_\sigma u = f_\sigma(y),\ y \in \gamma_\sigma,\ \sigma = 1, 2, \tag{2.1}$$

и

$$\Delta u = f(y),\ y \in K, \qquad \mathcal{B}_\sigma u = f_\sigma(y),\ y \in \gamma_\sigma,\ \sigma = 1, 2, \tag{2.2}$$

где

$$\mathbf{B}_\sigma u = u|_{\gamma_\sigma} + b_\sigma(y) u(\mathcal{G}_\sigma y)|_{\gamma_\sigma}, \qquad \mathcal{B}_\sigma v = u|_{\gamma_\sigma} + b_\sigma(0) u(\mathcal{G}_\sigma y)|_{\gamma_\sigma} \tag{2.3}$$

(в формуле для $\mathbf{B}_\sigma$ полагаем $b_\sigma(y) = 0$ при $y \in \gamma_\sigma \setminus \gamma_\sigma^\varepsilon$).

Вначале в § 7 строятся «решения» задач (2.1) и (2.2) в пространствах Соболева с точностью до функций, имеющих ноль определенного порядка в начале координат, при следующем условии.

Условие 2.2. *На прямой* $\operatorname{Im}\lambda = -l-1$ *нет собственных значений оператора* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$.

Затем рассматривается ситуация, когда выполнено

Условие 2.3. *Прямая* $\operatorname{Im}\lambda = -l-1$ *содержит единственное собственное значение* $\lambda_0 = -i(l+1)$*, и это собственное значение правильное.*

Определение 2.1. Собственное значение λ_0 оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ называется *правильным*, если для него не существует присоединенных векторов, а для любого собственного вектора $\varphi(\omega)$ функция $r^{i\lambda_0}\varphi(\omega)$, будучи записанной в декартовых координатах y_1, y_2, есть полином.

В этом случае на правые части нелокальных краевых условий и на правую часть уравнения в задачах (2.1) и (2.2) накладываются интегральные условия согласования в начале координат. Для того чтобы выписать условия согласования, нам потребуются некоторые дополнительные построения.

Пусть τ_σ — единичный вектор, сонаправленный с лучом γ_σ, и $D_{\tau_\sigma} = -i\partial/\partial\tau_\sigma$. Рассмотрим операторы $D_{\tau_\sigma}^{l+1}\big(u(y) + b_\sigma(0)u(\mathcal{G}_\sigma y)\big)$. Используя правило дифференцирования сложной функции, запишем их в виде

$$D_{\tau_\sigma}^{l+1}u(y) + (\hat{B}_\sigma(D)u)(\mathcal{G}_\sigma y), \quad \sigma = 1, 2, \tag{2.4}$$

где $\hat{B}_\sigma(D)$ — дифференциальные операторы порядка $l+1$ с постоянными коэффициентами. Заменяя нелокальные операторы в (2.4) на соответствующие локальные, введем операторы

$$D_{\tau_\sigma}^{l+1} + \hat{B}_\sigma(D), \quad \sigma = 1, 2. \tag{2.5}$$

Если $l \geqslant 1$, то наряду с системой (2.5) введем систему операторов

$$D^\xi\Delta, \quad |\xi| = l-1. \tag{2.6}$$

Рассмотрим систему (2.5)–(2.6) как алгебраическую систему, состоящую из $l+2$ выражений относительно $l+2$ частных производных D^α, $|\alpha| = l+1$. При выполнении условия 2.3 эта система оказывается линейно зависимой.

Выберем из системы (2.5) максимальное число линейно независимых операторов и обозначим их

$$\hat{\mathcal{B}}_{\sigma'}(D), \tag{2.7}$$

где множество индексов $\{\sigma'\}$ совпадает с одним из множеств $\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}$.

Пусть для определенности $\{\sigma'\} = \{1\}$, тогда

$$\hat{\mathcal{B}}_1(D) \neq 0, \qquad \hat{\mathcal{B}}_2(D) = \beta\hat{\mathcal{B}}_1(D), \tag{2.8}$$

где β — некоторая константа.

Дополним систему (2.7) (в данном случае состоящую из одного оператора $\hat{\mathcal{B}}_1(D)$) дифференциальными операторами из системы (2.6) таким образом, чтобы получившаяся система состояла из линейно независимых операторов

$$\hat{\mathcal{B}}_1(D), \ D^{\xi'}\Delta \tag{2.9}$$

и любой оператор $D^\xi\Delta$, не вошедший в систему (2.9), был представим в виде

$$D^\xi\Delta = p_\xi\hat{\mathcal{B}}_1(D) + \sum_{\xi'} p_{\xi\xi'}D^{\xi'}\Delta, \tag{2.10}$$

где p_ξ и $p_{\xi\xi'}$ — некоторые константы и суммирование проводится по всем ξ', соответствующим операторам из системы (2.9).

Рассмотрим функцию $f=\{f_0,f_\sigma\}\in\mathcal{W}^l(K,\gamma)$, где

$$\mathcal{W}^l(K,\gamma)=W^l(K)\times\prod_{\sigma=1,2}W^{l+3/2}(\gamma_\sigma).$$

Обозначим через $\Phi_\sigma\in W^2(K)$ продолжение функций f_σ в угол K.

Положим

$$\mathcal{T}f\equiv D^{l+1}_{\tau_2}\Phi_2-\beta D^{l+1}_{\tau_1}\Phi_1,$$

$$\mathcal{T}_\xi f\equiv D^\xi f_0-p_\xi D^{l+1}_{\tau_1}\Phi_1-\sum_{\xi'}p_{\xi\xi'}D^{\xi'}f_0.$$

Здесь β — константа из соотношения (2.8), p_ξ и $p_{\xi\xi'}$ — константы из соотношений (2.10); индексы ξ' соответствуют операторам из системы (2.9), а индексы ξ — операторам из системы (2.6), не вошедшим в систему (2.9).

Определение 2.2. Если для функции $f=\{f_0,f_\sigma\}\in\mathcal{W}^l(K,\gamma)$ выполнены соотношения

$$\int\limits_K r^{-2}|\mathcal{T}f|^2dy<\infty,\qquad \int\limits_K r^{-2}|\mathcal{T}_\xi f|^2dy<\infty \tag{2.11}$$

(ξ те же, что и выше), то будем говорить, что *функции* f_0,f_σ *удовлетворяют условию согласования* (2.11).

Замечание 2.1. Выполнение условий (2.11) не зависит от выбора продолжения функций f_σ.

Замечание 2.2. Соотношения $\int\limits_K r^{-2}|\mathcal{T}_\xi f|dy<\infty$ отсутствуют, если либо $l=0$, либо $l\geqslant 1$ и система (2.9) содержит все операторы из (2.6).

Во второй части § 7 строятся «решения» задач (2.1) и (2.2) в пространствах Соболева с точностью до функций, имеющих ноль определенного порядка в начале координат, при условии, что выполнено условие 2.3 и правые части f_0,f_σ удовлетворяют условию согласования (2.11).

Глава III. Сильные решения нелокальных эллиптических задач в ограниченной области в пространствах Соболева

Глава III посвящена разрешимости задачи (1.1), (1.2) в плоской ограниченной области в пространствах Соболева. Изучаются так называемые сильные решения, т. е. решения из пространства Соболева $W^{l+2}(G)$, $l\geqslant 0$.

Будем говорить, что функция g принадлежит $W^{l-1/2}(\partial G\setminus\{0\})$, $l\geqslant 1$, если $g\in W^{l-1/2}(\partial G\setminus\overline{\mathcal{O}_\delta(0)})$ при всех $\delta>0$ и ее сужение на $\gamma_\sigma^\varepsilon$ принадлежит $W^{l-1/2}(\gamma_\sigma^\varepsilon)$. Напомним, что, вообще говоря, $b_1(0)\neq b_2(0)$, поэтому рассматриваются следовые пространства, заданные на множестве $\partial G\setminus\{0\}$. Для целых $l\geqslant 0$ обозначим

$$\mathcal{W}^l(G,\partial G)=W^l(G)\times W^{l+3/2}(\partial G\setminus\{0\}).$$

В § 8 рассматривается соответствующий задаче (1.1), (1.2) ограниченный оператор

$$\mathbf{L}=(\Delta,\mathbf{B}):W^{l+2}(G)\to\mathcal{W}^l(G,\partial G).$$

Теорема 3.1. *Пусть выполнено условие* 2.2. *Тогда оператор* $\mathbf{L}:W^{l+2}(G)\to\mathcal{W}^l(G,\partial G)$ *фредгольмов. При этом, если положить* $\mathbf{B}^2=0$, *индекс оператора не изменится.*

Обратно, пусть оператор $\mathbf{L}:W^{l+2}(G)\to\mathcal{W}^l(G,\partial G)$ *фредгольмов; тогда выполнено условие* 2.2.

Для доказательства конечномерности ядра оператора $\mathbf{L}$ используются результаты о разрешимости задачи (1.1), (1.2) в весовых пространствах В. А. Кондратьева (см.[11]). Для доказательства замкнутости образа и конечномерности ортогонального дополнения к образу строится правый регуляризатор при помощи результатов из гл. II, § 7.

В § 9 применяются методы §§ 7 и 8 к исследованию задачи (1.1), (1.2) в весовых пространствах с малым показателем веса. Результаты этого параграфа используется в гл. IV, § 14, при изучении обобщенных решений задачи (1.1), (1.2).

Отметим, что при $a \leqslant l+1$ включение $u \in H_a^{l+2}(G)$, вообще говоря, не влечет включения $(\Delta u, \mathbf{B}u) \in \mathcal{H}_a^l(G, \partial G)$. Действительно, пусть оператор $\mathbf{B}^2$ задан формулой (1.3) и $\lim\limits_{y\in\gamma_1^\varepsilon,\, y\to 0} b(y) \neq 0$. Выбирая гладкую функцию u, равную нулю вблизи начала координат и единице вблизи точки $\Omega(0)$, видим, что $u \in H_a^{l+2}(G)$ и $\mathbf{B}^2 u$ принадлежит $W^{l+3/2}(\partial G \setminus \{0\})$, но не принадлежит $H_a^{l+3/2}(\partial G \setminus \{0\})$. Однако оказывается, что существует такое *конечномерное* пространство $\mathcal{R}_a^l(G, \partial G)$, состоящее из функций, имеющих особенность в начале координат, что $(\Delta u, \mathbf{B}u) \in \mathcal{H}_a^l(G, \partial G) \dotplus \mathcal{R}_a^l(G, \partial G)$.

Введем оператор

$$\mathbf{L}_a = (\Delta,\, \mathbf{B}) : H_a^{l+2}(G) \to \mathcal{H}_a^l(G, \partial G) \dotplus \mathcal{R}_a^l(G, \partial G), \qquad a > 0.$$

При $a > l+1$ можно положить $\mathcal{R}_a^l(G, \partial G) = \{0\}$ (см.[11]).

Доказан следующий результат.

Теорема 3.2. *Пусть* $a > 0$ *и прямая* $\operatorname{Im}\lambda = a - l - 1$ *не содержит собственных значений оператора* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$; *тогда оператор* $\mathbf{L}_a : H_a^{l+2}(G) \to \mathcal{H}_a^l(G, \partial G) \dotplus \mathcal{R}_a^l(G, \partial G)$ *фредгольмов.*

Обратно, пусть оператор $\mathbf{L}_a : H_a^{l+2}(G) \to \mathcal{H}_a^l(G, \partial G) \dotplus \mathcal{R}_a^l(G, \partial G)$ *фредгольмов*; *тогда прямая* $\operatorname{Im}\lambda = a - l - 1$ *не содержит собственных значений оператора* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$.

Из теоремы 3.2 следует, что если на правую часть $f \in \mathcal{H}_a^l(G, \partial G)$ наложить конечное число условий ортогональности, то задача (1.1), (1.2) будет иметь решение $u \in H_a^{l+2}(G)$.

В § 10 рассматривается случай, когда на прямой $\operatorname{Im}\lambda = -l-1$ имеется только правильное собственное значение оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. В этом случае в силу результатов § 8 оператор $\mathbf{L} : W^{l+2}(G) \to \mathcal{W}^l(G, \partial G)$ не фредгольмов (его образ незамкнут). Поэтому задаче (1.1), (1.2) ставится в соответствие другой оператор

$$\hat{\mathbf{L}} = (\Delta,\, \mathbf{B}) : W^{l+2}(G) \to \hat{\mathcal{S}}^l(G, \partial G) \dotplus \mathcal{R}^l(G, \partial G).$$

Здесь $\mathcal{R}^l(G, \partial G)$ — некоторое конечномерное подпространство в $\mathcal{W}^l(G, \partial G)$. Пространство $\hat{\mathcal{S}}^l(G, \partial G)$ состоит из таких функций $f = \{f_0, g\} \in \mathcal{W}^l(G, \partial G)$, что

1. если $l \geqslant 2$, то $D^\alpha f_0(0) = 0, \quad |\alpha| \leqslant l-2$,
2. $D_{\tau_\sigma}^k g(0) = 0, \quad k \leqslant l,\ \sigma = 1, 2$,
3. функции $\psi f_0, \psi g|_{\gamma_\sigma^\varepsilon}$ удовлетворяют условию согласования (2.11), где ψ — гладкая функция с носителем в ε-окрестности начала координат, равная единице в $\varepsilon/2$-окрестности начала координат.

Отметим, что в пространстве $\hat{\mathcal{S}}^l(G, \partial G)$ можно задать скалярное произведение, превратив это пространство в гильбертово.

Доказан аналог теоремы 3.1. Сформулируем его, считая для простоты, что $\mathbf{B}^2 = 0$ (в общем случае на $\mathbf{B}^2$ налагаются определенные условия согласования).

Теорема 3.3. *Пусть выполнено условие* 2.3 *и* $\mathbf{B}^2 = 0$. *Тогда оператор* $\hat{\mathbf{L}} = (\Delta,\, \mathbf{B}) : W^{l+2}(G) \to \hat{\mathcal{S}}^l(G, \partial G) \dotplus \mathcal{R}^l(G, \partial G)$ *фредгольмов.*

Так же как и в случае оператора $\mathbf{L}$, доказательство фредгольмовости оператора $\hat{\mathbf{L}}$ основано на результатах из гл. II, § 7, которые позволяют построить для оператора $\hat{\mathbf{L}}$ правый регуляризатор.

В § 11 рассматривается задача (1.1), (1.2) с однородными краевыми условиями. Введем пространство

$$W_B^{l+2}(G) = \{u \in W^{l+2}(G) : \mathbf{B}u = 0\}.$$

Очевидно, $W_B^{l+2}(G)$ — замкнутое подпространство в $W^{l+2}(G)$. Рассмотрим ограниченный оператор $\mathbf{L}_B : W_B^{l+2}(G) \to W^l(G)$, заданный формулой

$$\mathbf{L}_B u = \Delta u, \quad u \in W_B^{l+2}(G).$$

Вначале рассматривается случай, когда на прямой $\operatorname{Im}\lambda = -l-1$ либо нет собственных значений, либо имеется неправильное собственное значение оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$.

Теорема 3.4. *Пусть выполнено условие* 2.2. *Тогда оператор* $\mathbf{L}_B$ *фредгольмов.*

Пусть на прямой $\operatorname{Im}\lambda = -l-1$ *содержится неправильное собственное значение оператора* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. *Тогда образ оператора* $\mathbf{L}_B$ *незамкнут* (*и, следовательно, оператор* $\mathbf{L}_B$ *не фредгольмов*).

Далее, используя результаты § 10, мы доказываем, что если прямая $\operatorname{Im}\lambda = -l-1$ содержит только правильное собственное значение оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, то задача с однородными краевыми условиями (в отличие от задачи с неоднородными краевыми условиями) может оказаться фредгольмовой, если выполнены определенные алгебраические соотношения между операторами из систем (2.5) и (2.6).

Условие 3.1. *При* $l \geqslant 1$ *система* (2.9) *содержит все операторы из* (2.6).

Улучшение свойств задачи происходит за счет того, что условия согласования оказываются выполненными для любого вектора правых частей вида $(f_0, 0)$. Действительно, теперь первое соотношение в (2.11) выполнено, так как $\mathcal{T}(f_0, 0) = 0$, а второе соотношение в (2.11) отсутствует в силу условия 3.1 (см. замечание 2.2).

Снова предположим для упрощения формулировки результата, что $\mathbf{B}^2 = 0$.

Теорема 3.5. *Пусть выполнено условие* 2.3 *и* $\mathbf{B}^2 = 0$. *Тогда*

1. *оператор* $\mathbf{L}_B : W_B^2(G) \to L_2(G)$ *фредгольмов*;
2. *если* $l \geqslant 1$ *и выполнено условие* 3.1, *то оператор* $\mathbf{L}_B : W_B^{l+2}(G) \to W^l(G)$ *фредгольмов*;
3. *если* $l \geqslant 1$ *и условие* 3.1 *нарушено, то образ оператора* $\mathbf{L}_B : W_B^{l+2}(G) \to W^l(G)$ *незамкнут* (*и, следовательно, оператор* $\mathbf{L}_B$ *не фредгольмов*).

В § 12 приведены примеры, иллюстрирующие общие теоремы гл. III. Рассмотрим один из примеров. Предположим, что в окрестности начала координат область G совпадает с плоским углом раствора π (т. е. $\omega_2 - \omega_1 = \pi$), преобразование Ω_σ есть поворот на угол $\pi/2$ внутрь области G. Пусть $b_\sigma(y) \equiv \mathrm{const}$ (обозначим эти константы также через $b_\sigma \in \mathbb{R}$) и $b(y) \equiv 0$.

Применение теоремы 3.1 дает следующий результат.

Пусть l четно; *тогда оператор* $\mathbf{L} : W^{l+2}(G) \to \mathcal{W}^l(G, \partial G)$ *фредгольмов в том и только том случае, если* $b_1 + b_2 \neq 0$.

Пусть l нечетно; *тогда оператор* $\mathbf{L} : W^{l+2}(G) \to \mathcal{W}^l(G, \partial G)$ *не фредгольмов ни при каких* $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

Отметим, что в случае $b_1 = b_2 = 0$ («локальная» задача) оператор $\mathbf{L}$ не фредгольмов. Это связано с тем, что оператор $\mathbf{L}$ отвечает задаче с неоднородными краевыми условиями, причем правая часть $g \in \mathcal{W}^{l+3/2}(\partial G \setminus \{0\})$ может иметь особенность в начале координат. В терминах оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ нефредгольмовость оператора $\mathbf{L}$ объясняется тем, что собственные значения для $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ имеют вид $\lambda_n = ni$ $(n = 1, 2, \dots)$ и, следовательно, прямая $\operatorname{Im}\lambda = -l - 1$ содержит собственное значение при любом целом $l \geqslant 0$.

При помощи теорем 3.4 и 3.5 получим следующий результат.

Пусть l четно; тогда оператор $\mathbf{L}_B : W_B^{l+2}(G) \to W^l(G)$ фредгольмов при всех $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

Пусть l нечетно и $l = 4k+1$, $k = 0, 1, 2, \dots$; тогда оператор $\mathbf{L}_B : W_B^{l+2}(G) \to W^l(G)$ фредгольмов в том и только том случае, если $b_1 = b_2 < 1$.

Пусть l нечетно и $l = 4k+3$, $k = 0, 1, 2, \dots$; тогда оператор $\mathbf{L}_B : W_B^{l+2}(G) \to W^l(G)$ фредгольмов в том и только том случае, если $b_1 = b_2 > -1$.

На примерах, в частности, можно наблюдать следующие эффекты.

1. Даже в случае бесконечно гладкой границы нелокальная задача может не быть фредгольмовой в пространствах Соболева при сколь угодно малых коэффициентах в нелокальных членах. С другой стороны, при достаточно больших коэффициентах задача становится фредгольмовой.

2. Фредгольмова разрешимость нелокальной задачи в пространствах Соболева $W^{l+2}(G)$ зависит от показателя l. Например, задача может быть фредгольмовой при четных l и иметь незамкнутый образ при нечетных l.

По сути, эти эффекты обусловлены тем, что при изменении коэффициентов в нелокальных членах и показателя l в пространстве Соболева $W^{l+2}(G)$ меняется взаимное расположение собственных значений оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ и прямой $\operatorname{Im}\lambda = -l - 1$, структура жордановых цепочек, отвечающих собственным значениям, а также структура алгебраических соотношений между операторами из систем (2.5) и (2.6).

Глава IV. Обобщенные решения нелокальных эллиптических задач

В гл. IV изучаются обобщенные решения задачи (1.1), (1.2).

В § 13 вводится определение обобщенного решения задачи (1.1), (1.2). Если эллиптическое уравнение имеет второй порядок, то можно рассматривать обобщенные решения из пространства $L_2(G)$ или $W^1(G)$. Для определенности ограничимся вторым случаем.

Определение 4.1. Функция u называется *обобщенным решением* задачи (1.1), (1.2) с правой частью $f_0 \in L_2(G)$, $g \in W^{1/2}(\partial G \setminus \{0\})$, если u принадлежит $W^1(G)$ и удовлетворяет уравнению (1.1) в смысле теории распределений и нелокальным краевым условиям (1.2) в смысле следов.

В § 14 рассматривается неограниченный оператор $\mathbf{P} : \mathrm{D}(\mathbf{P}) \subset L_2(G) \to L_2(G)$, действующего по формуле

$$\mathbf{P}u = \Delta u, \quad u \in \mathrm{D}(\mathbf{P}) = \{u \in W^1(G) : \Delta u \in L_2(G),\ \mathbf{B}u = 0\}.$$

Теорема 4.1. *Оператор $\mathbf{P}$ фредгольмов.*

Для доказательства теоремы 4.1 используются результаты гл. III, § 9, о разрешимости нелокальных задач в весовых пространствах с малым показателем веса и теоремы вложения весовых пространств в пространства Соболева.

Замечание 4.1. В отличие от случая ограниченного оператора $\mathbf{L}_B$ фредгольмовость неограниченного оператора $\mathbf{P}$ не зависит ни от спектральных свойств оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, ни от выполнения алгебраических соотношений между оператором Δ и операторами в нелокальных краевых условиях.

В § 15 установлено, что индекс оператора $\mathbf{P} : \mathrm{D}(\mathbf{P}) \subset L_2(G) \to L_2(G)$ не меняется при добавлении в эллиптическом уравнении младших членов вида

$$P'(y, D) = \sum_{j=1,2} p_j(y) D_{y_j} + p_0(y), \tag{4.1}$$

где $p_0, p_1, p_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Рассмотрим возмущенный оператор $\mathbf{P}' : \mathrm{D}(\mathbf{P}') \subset L_2(G) \to L_2(G)$, заданный формулой

$$\mathbf{P}'u = \Delta u + P'(y, D)u, \quad u \in \mathrm{D}(\mathbf{P}') = \{u \in W^1(G) : \Delta u + P'(y, D)u \in L_2(G),\ \mathbf{B}u = 0\}.$$

Теорема 4.2. *Операторы* $\mathbf{P}$ *и* $\mathbf{P}'$ *фредгольмовы, и* $\operatorname{ind} \mathbf{P}' = \operatorname{ind} \mathbf{P}$.

Трудность заключается в том, что младшие члены, вообще говоря, не являются ни компактными, ни даже $\mathbf{P}$-компактными[36] возмущениями. Включение $u \in \mathrm{D}(\mathbf{P})$ влечет $u \in W^1(G)$, что гарантирует $\mathbf{P}$-ограниченность возмущения, но не его $\mathbf{P}$-компактность. В случае эллиптических уравнений порядка $2m$ включение $u \in \mathrm{D}(\mathbf{P})$, вообще говоря, не влечет $u \in W^{2m-1}(G)$ и возмущение не является даже $\mathbf{P}$-ограниченным. Более того, в этом случае $\mathrm{D}(\mathbf{P}') \neq \mathrm{D}(\mathbf{P})$.

В § 16 доказана устойчивость индекса при добавлении в краевые условия нелокальных членов с коэффициентами, имеющими ноль определенного порядка в начале координат.

Рассмотрим функции $\hat{b}_\sigma(y)$ и $\hat{b}(y)$ и преобразования $\hat{\Omega}_\sigma$ и $\hat{\Omega}$, обладающие теми же свойствами, что функции $b_\sigma(y)$ и $b(y)$ и преобразования Ω_σ и Ω соответственно. Зададим операторы

$$\mathbf{C}^1 u(y) = \begin{cases} \hat{b}_\sigma(y) u(\hat{\Omega}_\sigma(y))|_{\gamma_\sigma^\varepsilon}, & y \in \gamma_\sigma^\varepsilon,\ \sigma = 1, 2, \\ 0, & y \in \partial G \setminus \mathcal{O}_\varepsilon(0), \end{cases}$$
$$\mathbf{C}^2 u(y) = \hat{b}(y) u(\hat{\Omega}(y))|_{\partial G \setminus \{0\}}.$$

Рассмотрим операторы $\mathbf{P}_t : \mathrm{D}(\mathbf{P}_t) \subset L_2(G) \to L_2(G)$, $t \in \mathbb{C}$, действующие по формуле

$$\mathbf{P}_t u = \Delta u, \quad u \in \mathrm{D}(\mathbf{P}_t) = \{u \in W^1(G) :\ \Delta u \in L_2(G),\ u|_{\partial G \setminus \{0\}} + \mathbf{B}^1 u + t(\mathbf{C}^1 + \mathbf{C}^2)u = 0\}.$$

Теорема 4.3. *Пусть* $\hat{b}_1(0) = \hat{b}_2(0) = \lim\limits_{y \in \gamma_1^\varepsilon,\, y \to 0} \hat{b}(y) = 0$. *Тогда* $\operatorname{ind} \mathbf{P}_t = \mathrm{const}$ *при всех* $t \in \mathbb{C}$.

Так же как и в § 15, основная трудность заключается в том, что при возмущении оператора задачи меняется его область определения. В обоих случаях для доказательства устойчивости индекса используется понятие раствора между неограниченными операторами[36] и сведение к операторам, действующим в весовых пространствах.

В § 17 показано, что при добавлении в краевые условия нелокальных членов со сколь угодно малыми коэффициентами, не равными нулю в начале координат, индекс оператора $\mathbf{P}$ может меняться. Там же приведены примеры оператора $\mathbf{P}$, спектр которого занимает всю комплексную плоскость.

Глава V. Гладкость обобщенных решений нелокальных эллиптических задач

Глава V посвящена гладкости обобщенных решений $u \in W^1(G)$ задачи (1.1), (1.2) при условии, что $f_0 \in L_2(G)$, $g \in W^{3/2}(\partial G \setminus \{0\})$. Под гладкостью обобщенного решения понимается его принадлежность пространству $W^2(G)$. Как известно, если $\mathbf{B}^1 = 0$, $\mathbf{B}^2 = 0$, $g = 0$ и граница ∂G гладкая, то любое обобщенное решение принадлежит $W^2(G)$. Однако в случае нелокальных краевых задач гладкость обобщенных решений может нарушаться даже для бесконечно дифференцируемой правой части и бесконечно гладкой границы области.

[36] *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.

Полученные результаты опираются на теоремы гл. II, § 7, о разрешимости модельных нелокальных задач в плоских углах и на результаты работ[9, 37] об асимптотике решений нелокальных задач в весовых пространствах.

В § 18 предполагается выполненным следующее условие.

Условие 5.1. *В полосе* $-1 \leqslant \operatorname{Im}\lambda < 0$ *нет собственных значений оператора* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$.

Теорема 5.1. *Пусть выполнено условие* 5.1, *и пусть* u — *обобщенное решение задачи* (1.1), (1.2) *с правой частью* $f_0 \in L_2(G)$, $g \in W^{3/2}(\partial G \setminus \{0\})$. *Тогда* $u \in W^2(G)$.

По теореме 5.1 любое обобщенное решение задачи (1.1), (1.2) принадлежит $W^2(G)$. Правая часть g в нелокальном условии принадлежат пространству $W^{3/2}(\partial G \setminus \{0\})$. Однако никаких дополнительных ограничений (типа условий согласования в начале координат) на поведение функции $g(y)$ и коэффициентов нелокальных операторов не налагается. В действительности функция $g \in W^{3/2}(\partial G \setminus \{0\})$ не совсем произвольна. Например, если $\mathbf{B}^1 = 0$ и $\mathbf{B}^2 = 0$ (т. е. рассматривается «локальная» задача Дирихле) и решение u принадлежит $W^2(G)$, то в силу теоремы вложения Соболева

$$\lim_{y \in \gamma_1^\varepsilon,\, y \to 0} g(y) = \lim_{y \in \gamma_2^\varepsilon,\, y \to 0} g(y). \tag{5.1}$$

Теорема 5.1 показывает, что при выполнении условия 5.1 существование *обобщенного* решения автоматически гарантирует выполнение соотношений вида (5.1). В § 19 будет доказано, что если условие 5.1 нарушено, то, для того чтобы любое обобщенное решение было гладким, на правую часть g необходимо налагать определенные условия согласования.

В § 19 исследуется так называемый *пограничный случай*, а именно предполагается, что выполнено следующее условие (ср. условие 2.3).

Условие 5.2. *В полосе* $-1 < \operatorname{Im}\lambda < 0$ *нет собственных значений оператора* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. *На прямой* $\operatorname{Im}\lambda = -1$ *имеется единственное собственное значение* $\lambda = -i$ *оператора* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, *и оно правильное.*

В этом параграфе получены (интегральные) условия согласования, которым должна удовлетворять правая часть g и коэффициенты в нелокальных краевых условиях для того, чтобы любое обобщенное решение задачи (1.1), (1.2) принадлежало $W^2(G)$.

Введем вначале условие согласования для правых частей $f_\sigma \in W^{3/2}(\gamma_\sigma^\varepsilon)$ следующим образом. Обозначим $f_\sigma^0(r) = f_\sigma(y)|_{y=(r\cos\omega_\sigma,\, r\sin\omega_\sigma)}$. Очевидно, $f_\sigma^0 \in W^{3/2}(0, \varepsilon)$.

Определение 5.1. Пусть β — константа из соотношений (2.8), полученных при $l = 0$. Если выполнено соотношение

$$\int\limits_0^\varepsilon r^{-1} \left| \frac{d}{dr}\bigl(f_2^0(r) - \beta f_1^0(r)\bigr) \right|^2 dr < \infty, \tag{5.2}$$

то будем говорить, что *функции* f_σ, $\sigma = 1, 2$, *удовлетворяют условию согласования* (5.2).

Будем говорить, что *функция* $g \in W^{3/2}(\partial G \setminus \{0\})$ *удовлетворяет условию согласования* (5.2), если этому условию удовлетворяют функции $g|_{\gamma_\sigma^\varepsilon}$, $\sigma = 1, 2$.

Замечание 5.1. Соотношение (5.2) эквивалентно соотношению (2.11) при $l = 0$.

Показано, что гладкость обобщенных решений задачи (1.1), (1.2) может нарушаться, если правые части в нелокальных условиях не удовлетворяют условию согласования.

[37] *Гуревич П. Л.* Асимптотика решений нелокальных эллиптических задач в плоских углах// Труды семинара им. И. Г. Петровского. — 2003. — *23*. — С. 93–126.

Теорема 5.2. *Пусть выполнено условие* 5.2. *Тогда существуют такие функции* $f_0 \in L_2(G)$, $g \in W^{3/2}(\partial G \setminus \{0\})$ *и* $u \in W^1(G)$, *что* u — *обобщенное решение задачи* (1.1), (1.2) *с правой частью* (f_0, g), *функция* g *не удовлетворяет условию согласования* (5.2) *и* $u \notin W^2(G)$.

Таким образом, чтобы *любое* обобщенное решение задачи (1.1), (1.2) было гладким, необходимо брать правую часть g, удовлетворяющую условию согласования (5.2).

Далее доказывается, что следующее условие необходимо и достаточно для того, чтобы любое обобщенное решение было гладким (в формулировке условия участвуют операторы $\mathbf{B}_\sigma$, которые определены в (2.3)).

Условие 5.3.

1. *Для любой* $v \in W^2(G)$ *функции* $(\mathbf{B}^2 v)|_{\gamma_\sigma^\varepsilon}$ *удовлетворяют условию согласования* (5.2).
2. *Для любой константы* C *функции* $\mathbf{B}_\sigma C$ *удовлетворяют условию согласования* (5.2).

Теорема 5.3. *Пусть выполнено условие* 5.2. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если выполнено условие* 5.3 *и* u — *обобщенное решение задачи* (1.1), (1.2) *с правой частью* $f_0 \in L_2(G)$, $g \in W^{3/2}(\partial G \setminus \{0\})$, *причем* g *удовлетворяет условию согласования* (5.2), *то* $u \in W^2(G)$.
2. *Если условие* 5.3 *нарушено, то существует такая правая часть* $f_0 \in L_2(G)$, $g \in W^{3/2}(\partial G \setminus \{0\})$, *где функция* g *удовлетворяет условию согласования* (5.2), *и такое обобщенное решение* u *задачи* (1.1), (1.2), *что* $u \notin W^2(G)$.

Замечание 5.2. В § 22 рассмотрен пример, в котором $\omega_1 = -\pi/2$, $\omega_2 = \pi/2$ (т. е. граница области бесконечно гладкая), преобразования Ω_σ ($\sigma = 1, 2$) представляют собой поворот на угол $\pi/2$ внутрь области и оператор $\mathbf{B}^2$ задан явной формулой (1.3). Показано, что условие 5.2 принимает вид

$$b_1(0) + b_2(0) = 0,$$

часть 1 условия 5.3 — вид

$$b(0) = \frac{\partial b(0)}{\partial y_2} = 0,$$

где значение функции в нуле понимается в смысле одностороннего предела при $y \in \gamma_1^\varepsilon$, $y \to 0$, а часть 2 условия 5.3 — вид

$$\int\limits_0^\varepsilon r^{-1} \left| \frac{\partial b_1}{\partial y_2}\Big|_{y=(0,-r)} - \frac{\partial b_2}{\partial y_2}\Big|_{y=(0,r)} \right|^2 dr < \infty.$$

Далее рассматривается случай так называемой регулярной правой части.

Определение 5.2. Правую часть g в нелокальном условии (1.2) назовем *регулярной*, если

$$\lim_{y \in \gamma_1^\varepsilon,\, y \to 0} g(y) = \lim_{y \in \gamma_2^\varepsilon,\, y \to 0} g(y) = 0.$$

Соответствующую пару правых частей f_0, g также будем называть в этом случае *регулярной*.

Если ограничиться лишь регулярными правыми частями g, то условие 5.3 можно ослабить.

Определение 5.3. Функцию $v \in W^2(G)$ назовем *допустимой*, если существует такая константа C, что

$$\lim_{y \in \gamma_\sigma^\varepsilon,\, y \to 0} ((\mathbf{B}^2 v)|_{\gamma_\sigma^\varepsilon} + \mathbf{B}_\sigma C) = 0, \quad \sigma = 1, 2. \tag{5.3}$$

Любую константу C, удовлетворяющую соотношениям (5.3), будем называть *допустимой константой, соответствующей функции* v.

Доказано, что следующее условие является необходимым и достаточным для того, чтобы любое обобщенное решение задачи (1.1), (1.2) с регулярной правой частью g было гладким.

Условие 5.4. *Для любой допустимой функции v и любой допустимой константы C, соответствующей v, функции $(\mathbf{B}^2 v)|_{\gamma_\sigma^\varepsilon} + \mathbf{B}_\sigma C$ удовлетворяют условию согласования* (5.2).

Теорема 5.4. *Пусть выполнено условие* 5.2. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если выполнено условие* 5.4, *функция u есть обобщенное решение задачи* (1.1), (1.2) *с регулярной правой частью $f_0 \in L_2(G)$, $g \in W^{3/2}(\partial G \setminus \{0\})$ и функция g удовлетворяет условию согласования* (5.2), *то $u \in W^2(G)$.*
2. *Если условие* 5.4 *нарушено, то существует регулярная правая часть $f_0 \in L_2(G)$, $g \in W^{3/2}(\partial G \setminus \{0\})$ и обобщенное решение u задачи* (1.1), (1.2), *такие, что функция g удовлетворяет условию согласования* (5.2), *но $u \notin W^2(G)$.*

Замечание 5.3. Рассмотрим пример из замечания 5.2. В § 22 показано, что условие 5.4 принимает вид

$$b(0) = \frac{\partial b(0)}{\partial y_2} = 0,$$

где значение функции в нуле понимается в смысле одностороннего предела при $y \in \gamma_1^\varepsilon$, $y \to 0$. Таким образом, это условие действительно слабее условия 5.3, в котором накладываются дополнительные ограничения на производные функций $b_1(y)$ и $b_2(y)$.

Очевидно, выполнение условия 5.4 достаточно для сохранения гладкости в случае однородных краевых условий (т. е. когда $g = 0$). В заключение § 19 показано, что в ряде случаев это условие является также и необходимым для сохранения гладкости обобщенных решений задачи (1.1), (1.2) с однородными краевыми условиями.

Отметим, что в общем случае уравнения порядка $2m$ и обобщенных решений из пространства $W^\ell(G)$ $(0 \leqslant \ell \leqslant 2m-1)$ вместо полосы $-1 < \operatorname{Im}\lambda < 0$ рассматривается полоса $1 - 2m < \operatorname{Im}\lambda < 1 - \ell$. В полосе могут оказаться правильные собственные значения оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. Результаты, аналогичные случаю $m = 1$, имеют место, вообще говоря, тогда и только тогда, когда выполнены некоторые дополнительные условия на структуру собственных и присоединенных функций, отвечающих этим собственным значениям. В § 20 изучаются нелокальные краевые условия специального вида с нулевой правой частью, для которых эти дополнительные условия несущественны. Один из частных случаев состоит в том, что дифференциальные операторы в нелокальных условиях однородны и имеют постоянные коэффициенты вблизи начала координат.

В § 21 рассмотрен случай, когда гладкость обобщенных решений может нарушаться.

Теорема 5.5. *Пусть полоса $-1 \leqslant \operatorname{Im}\lambda < 0$ содержит неправильное собственное значение оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. Тогда существует правая часть $f_0 \in L_2(G)$ и обобщенное решение u задачи* (1.1), (1.2) *с однородным краевым условием, такие, что $u \notin W^2(G)$.*

В § 22 приведен пример, иллюстрирующий результаты §§ 18–21 (см. замечания 5.2 и 5.3).

Глава VI. Полугруппы Феллера и двумерные диффузионные процессы.

В гл. VI изучается вопрос о существовании полугрупп Феллера, возникающих в теории многомерных диффузионных процессов при описании движения частицы в области с вероятностной точки зрения.

Пусть $\mathcal{X}$ — замкнутое подпространство в $C(\overline{G})$, содержащее по крайней мере одну неотрицательную функцию.

Определение 6.1. Сильно непрерывная полугруппа операторов $\mathbf{T}_t : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ называется *полугруппой Феллера на* $\mathcal{X}$, если: 1. $\|\mathbf{T}_t\| \leqslant 1$, $t \geqslant 0$; 2. $\mathbf{T}_t u \geqslant 0$ для всех $t \geqslant 0$ и $u \in \mathcal{X}$, $u \geqslant 0$.

Определение 6.2. Линейный оператор $\mathbf{P} : \mathrm{D}(\mathbf{P}) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ называется *генератором* (*инфинитезимальным производящим оператором*) сильно непрерывной полугруппы $\{\mathbf{T}_t\}$, если

$$\mathbf{P}u = \lim_{t\to+0} \frac{\mathbf{T}_t u - u}{t}, \quad \mathrm{D}(\mathbf{P}) = \{u \in \mathcal{X} : \text{предел в } \mathcal{X} \text{ существует}\}.$$

Как и ранее, изложим основные результаты на примере оператора Лапласа. В диссертации изучается эллиптический дифференциальный оператор $\mathbf{P}(y, D)$ второго порядка с гладкими вещественнозначными коэффициентами, такой, что $\mathbf{P}(y, D)1 \leqslant 0$, $y \in \overline{G}$.

Предположим, что область определения оператора Лапласа задается нелокальными краевыми условиями *нетрансверсального* типа (ср. (1.2))

$$\begin{gathered} u(y) - \mathbf{B}^1 u(y) - \mathbf{B}^2 u(y) - \int\limits_{\overline{G}} u(\eta)\beta(y, d\eta) = 0, \quad y \in \partial G \setminus \{0\}, \\ u(0) = 0. \end{gathered} \tag{6.1}$$

Здесь $\beta(y, \cdot)$ — неотрицательная борелевская мера. Всюду далее предполагается, что

$$b_\sigma(y) \geqslant 0, \qquad b(y) \geqslant 0, \tag{6.2}$$

$$\begin{gathered} b_\sigma(y) + b(y) + \beta(y, \overline{G}) \leqslant 1, \quad y \in \gamma_\sigma^\varepsilon, \ \sigma = 1, 2, \\ b(y) + \beta(y, \overline{G}) \leqslant 1, \quad y \in \partial G \setminus \mathcal{O}_\varepsilon(0). \end{gathered} \tag{6.3}$$

В качестве $\mathcal{X}$ будем рассматривать пространство

$$C_B(\overline{G}) = \{u \in C(\overline{G}) : u \text{ удовлетворяет } (6.1)\}.$$

Основной вопрос этой главы: при каких $b_\sigma(y)$, $b(y)$ и $\beta(y, \cdot)$ эллиптический дифференциальный или интегро-дифференциальный оператор с краевыми условиями (6.1) будет генератором полугруппы Феллера в пространстве $C_B(\overline{G})$? Для ответа на этот вопрос исследуются свойства нелокальных эллиптических задач в пространстве непрерывных функций и применяется теорема Хилле—Иосиды.

Отметим, что условия (6.2) и (6.3) являются необходимыми для того, чтобы указанный оператор был генератором полугруппы Феллера (см.[22]).

В § 23 получены результаты об однозначной разрешимости в весовых пространствах $H_a^l(G)$ и затем в $C(\overline{G})$ эллиптического уравнения

$$\Delta u - qu = f_0(y) \quad (y \in G, \ q > 0)$$

с нелокальными краевыми условиями (6.1) в случае, когда $\mathbf{B}^2 = 0$ и $\beta(y, \cdot) \equiv 0$. При этом на коэффициенты $b_1(y)$ и $b_2(y)$ налагается следующее условие.

Условие 6.1. $b_1(0) + b_2(0) < 2$.

Замечание 6.1. Отметим, что ранее, в работах А. Л. Скубачевского и Е. И. Галахова, предполагались выполненными условия $0 \leqslant b_\sigma(0) < 1$ или $0 \leqslant b_\sigma(0) < 1/2$, $\sigma = 1, 2$ (в зависимости от структуры меры $\beta(y, \cdot)$). В настоящей работе допускается предельный случай, когда один из коэффициентов $b_\sigma(y)$ может равняться единице в точке сопряжения краевых условий (в данном случае в начале координат). Построен пример, когда оба коэффициента одновременно равны единице и соответствующей полугруппы Феллера не существует (см. § 26).

При помощи результатов § 23 и теоремы Хилле—Иосиды в § 24 получены условия на оператор $\mathbf{B}^2$ (в данном случае на функцию $b(y)$ и преобразование Ω) и меру $\beta(y,\cdot)$, при которых неограниченный оператор $\mathbf{P}_B : \mathrm{D}(\mathbf{P}_B) \subset C_B(\overline{G}) \to C_B(\overline{G})$, заданный формулой

$$\mathbf{P}_B u = \Delta u + \mathbf{P}_1 u,$$
$$u \in \mathrm{D}(\mathbf{P}_B) = \{u \in C_B(\overline{G}) : \Delta u + \mathbf{P}_1 u \in C_B(\overline{G})\},$$

является генератором полугруппы Феллера. Здесь $\mathbf{P}_1$ — *ограниченный* в $C(\overline{G})$ оператор такой, что если функция $u \in C(\overline{G})$ достигает в точке $y^0 \in G$ положительного максимума, то $\mathbf{P}_1 u(y^0) \leqslant 0$. Оператор $\mathbf{P}_1$ представляет собой обобщение ограниченного интегрального оператора вида

$$\mathbf{P}_1 u(y) = \int\limits_{\overline{G}} [u(\eta) - u(y)] m_1(y, d\eta), \quad y \in \overline{G},$$

где $m_1(y,\cdot)$ — неотрицательная борелевская мера на $\overline{G}$.

Для простоты изложения результатов далее будем считать, что $\beta(y,\cdot) \equiv 0$. В общем случае предполагается, что мера $\beta(y,\cdot)$ представима в виде суммы двух неотрицательных борелевских мер: первая обладает некоторым свойством малости, а вторая порождает в соответствующих пространствах компактный оператор.

Положим

$$\mathcal{N} = \{y \in \partial G : (6.1) \text{ эквивалентно } u(y) = 0\}.$$

Условие 6.2. $\Omega(0) \in \mathcal{N}$ *или* $\lim\limits_{y \in \gamma_1^\varepsilon,\, y \to 0} b(y) = 0.$

Условие 6.2 есть условие согласования для оператора $\mathbf{B}^2$. Оно гарантирует, что если $u \in C_B(\overline{G})$, то $\mathbf{B}^2 u \in C(\partial G)$.

Сводя нелокальную задачу на границу и используя результаты § 23, мы доказываем разрешимость эллиптического уравнения с нелокальным условием (6.1) в пространстве непрерывных функций, а также убеждаемся в том, что область определения оператора $\mathbf{P}_B$ плотна в $C_B(\overline{G})$. Отсюда и из теоремы Хилле—Иосиды получаем основной результат § 24.

Теорема 6.1. *Пусть выполнены условия* 6.1 *и* 6.2, *и пусть* $\beta(y,\cdot) \equiv 0$. *Тогда оператор* $\mathbf{P}_B : \mathrm{D}(\mathbf{P}_B) \subset C_B(\overline{G}) \to C_B(\overline{G})$ *является генератором полугруппы Феллера.*

В § 25 получены результаты, аналогичные результатам § 24, для случая *неограниченного* в $C(\overline{G})$ возмущения $\mathbf{P}_2$, обобщающего интегральный оператор вида

$$\mathbf{P}_2 u(y) = \int\limits_F [u(y + z(y,\eta)) - u(y) - (\nabla u(y), z(y,\eta))] m_2(y,\eta) \pi(d\eta), \quad y \in G,$$

где F — пространство с σ-алгеброй $\mathcal{F}$ и борелевской мерой π, вектор-функция $z(y,\eta)$ и скалярная функция $m(y,\eta)$ ограничены и π-измеримы по η, $m_2(y,\eta) \geqslant 0$, $y + z(y,\eta) \in \overline{G}$ для всех $y \in \overline{G}$, $\eta \in F$.

В § 26 построены примеры, в которых нарушено условие 6.1 или условие 6.2 и замыкание соответствующего оператора $\mathbf{P}_B$ не является генератором полугруппы Феллера. Для этого доказывается, что образ оператора $\overline{\mathbf{P}}_B - q\mathbf{I}$ не совпадает с $C_B(\overline{G})$ при некотором $q > 0$, и применяется теорема Хилле—Иосиды.

Публикации по теме диссертации

Статьи в научных журналах

1. *Гуревич П. Л.* Нелокальные эллиптические задачи с нелинейными преобразованиями переменных вблизи точек сопряжения// Известия РАН. Сер. матем. — 2003. — *67*, № 6. — С. 81–120.
2. *Гуревич П. Л.* О гладкости обобщенных решений нелокальных эллиптических задач на плоскости// Докл. АН. — 2004. — *398*, № 3. — С. 295–299.
3. *Гуревич П. Л.* Обобщенные решения нелокальных эллиптических задач// Матем. заметки. — 2005. — *77*, № 5. — С. 665–682.
4. *Гуревич П. Л.* Об устойчивости индекса неограниченных нелокальных операторов в пространствах Соболева// Труды МИАН. — 2006. — *255*. — С. 116–135.
5. *Гуревич П. Л.* О неустойчивости индекса некоторых нелокальных эллиптических задач// Труды семинара им. И. Г. Петровского. — 2007. — *26*. С. 179–194.
6. *Гуревич П. Л.* Неограниченные возмущения двумерных диффузионных процессов с нелокальными краевыми условиями// Докл. АН. — 2007. — *417*, № 4. — С. 451–455.
7. *Гуревич П. Л.* О существовании полугруппы Феллера с атомарной мерой в нелокальном краевом условии// Труды МИАН. 2008. — *260*. — С. 164–179.
8. *Гуревич П. Л.* Ограниченные возмущения двумерных диффузионных процессов с нелокальными условиями вблизи границы// Матем. заметки. — 2008. — *83*, № 2. — 181–198.
9. *Гуревич П. Л.* О несуществовании полугрупп Феллера в нетрансверсальном случае// Успехи матем. наук. — 2008. — *63*, № 3. — С. 159-160.
10. *Гуревич П. Л., Скубачевский А. Л.* О фредгольмовой и однозначной разрешимости нелокальных эллиптических задач в многомерных областях// Труды Моск. матем. общ. — 2007. — *68*. — С. 288–373.
11. *Gurevich P. L.* Solvability of nonlocal elliptic problems in Sobolev spaces, I// Russ. J. Math. Phys. — 2003. — *10*, № 4. — P. 436–466.
12. *Gurevich P. L.* Solvability of nonlocal elliptic problems in Sobolev spaces, II// Russ. J. Math. Phys. — 2004. — *11*, № 1. — P. 1–44.
13. *Gurevich P. L.* The consistency conditions and the smoothness of generalized solutions of nonlocal elliptic problems// Adv. Differential Equations. — 2006. — *11*, № 3. — P. 305–360.
14. *Gurevich P. L.* Smoothness of generalized solutions for higher-order elliptic equations with nonlocal boundary conditions// J. Differential Equations. — 2008. — *245*. — P. 1323–1355.

Тезисы международных конференций

1. *Gurevich P. L.* Asymptotics and smoothness of generalized solutions for nonlocal elliptic problems// Тезисы Международной конференции «Функционально-дифференциальные уравнения и приложения». Беер-Шева. Израиль. — 2002. — С. 25-26.
2. *Gurevich P. L.* Nonlocal elliptic problems in Sobolev spaces// Тезисы Третьей международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям. Москва. МАИ. — 2002. — С. 41-42.

3. *Gurevich P. L.* Nonlocal elliptic problems near the boundary in Sobolev spaces// Тезисы Международной конференции «Колмогоров и современная математика», посвященной столетию со дня рождения А. Н. Колмогорова. Москва. Математический институт им. В. А. Стеклова. — 2003. — С. 176-177.

4. *Gurevich P. L.* Nonlocal elliptic problems with nonlinear argument transformations near the boundary// Тезисы Международной конференции «Нелинейные уравнения с частными производными». Алушта. Украина. — 2003. — С. 86-87.

5. *Gurevich P. L.* Elliptic problems with nonlocal conditions near the boundary// Тезисы Международной конференции по дифференциальным уравнениям с частными производными, посвященной В. А. Солонникову. Феррара. Италия. — 2003. С. 13.

6. *Gurevich P. L.* On Fredholm solvability of nonlocal elliptic problems in Sobolev spaces// Тезисы Международной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященной И. Г. Петровскому. Москва. МГУ им. М. В. Ломоносова. — 2004. — С. 81-82.

7. *Gurevich P. L.* Elliptic equations with nonlocal boundary-value conditions on Sobolev spaces// Тезисы Международной конференции «Функциональные пространства, теория аппроксимации, нелинейный анализ», посвященной столетию С. М. Никольского. Москва. Математический институт им. В. А. Стеклова. — 2005. — С. 288.

8. *Gurevich P. L.* Regularity of generalized solutions to nonlocal elliptic problems// Тезисы Четвертой международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям. Москва. Математический институт им. В. А. Стеклова. — 2005. — С. 42-43.

9. *Gurevich P. L.* Generalized solutions to nonlocal elliptic problems// Тезисы Международной конференции «Нелинейные уравнения с частными производными», посвященной О. А. Ладыженской. Алушта. Украина. — 2005. — С. 40.

10. *Gurevich P. L.* Unbounded operators corresponding to nonlocal elliptic problems in Sobolev spaces// Тезисы Международной конференции «Тихонов и современная математика». Москва. МГУ им. М. В. Ломоносова. — 2006. — Раздел 1, с. 93-94.

11. *Gurevich P. L.* Elliptic problems with nonlocal boundary-value conditions// Тезисы Международного конгресса математиков. Мадрид. Испания. — 2006.

12. *Гуревич П. Л.* Нелокальные эллиптические задачи и полугруппы Феллера в нетрансверсальном случае// Тезисы Международной конференции «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования», посвященной 85-летию Л. Д. Кудрявцева. Москва. — 2008. — С. 250-251.