ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Гуревич Павел Леонидович

РАЗРЕШИМОСТЬ И АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

01.01.02 — дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва
2002

Работа выполнена на факультете прикладной математики и физики Московского авиационного института (государственного технического университета).

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор А.Л. Скубачевский,
Московский авиационный институт

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Л.Р. Волевич,
Институт прикладной математики
им. М.В. Келдыша РАН,

доктор физико-математических наук,
профессор А.А. Шкаликов,
Механико–математический факультет МГУ

Ведущая организация: Математический институт
им. В.А. Стеклова РАН

Защита состоится 27 декабря 2002 г. в 14 часов 30 мин. на заседании диссертационного совета К.501.001.07 в МГУ им. М.В. Ломоносова по адресу:

119899, ГСП, Москва, Воробьевы горы, МГУ, факультет вычислительной математики и кибернетики, 2-ой учебный корпус, ауд. 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета ВМиК МГУ.

Автореферат разослан 20 ноября 2002 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
к. ф.-м. н. В.М. Говоров

Актуальность темы

В настоящее время особый интерес к нелокальным задачам обусловлен, с одной стороны, значительными теоретическими достижениями в данном направлении и, с другой стороны, важными приложениями, возникающими в таких областях, как: теория плазмы[1], биофизика, теория диффузионных процессов[2], теория многослойных пластин и оболочек[3].

В одномерном случае нелокальные задачи изучали еще A. Sommerfeld, Я.Д. Тамаркин, M. Picone и др. В двумерном случае одна из первых работ, посвященных нелокальным задачам, принадлежит T. Carleman[4], который рассмотрел задачу о нахождении гармонической в ограниченной области функции, удовлетворяющей нелокальному краевому условию, связывающему значения искомой функции в различных точках границы. С такой постановкой задачи связаны дальнейшие исследования нелокальных эллиптических задач со сдвигами, отображающими границу области на себя, и абстрактных эллиптических задач[5] [6] [7].

В 1969 году А.В. Бицадзе и А.А. Самарский[8] рассмотрели возникающую в теории плазмы задачу о нахождении гармонической в прямоугольной области функции; при этом, помимо условий Дирихле на части границы, на искомую функцию накладываются нелокальные условия, связывающие значения функции на оставшейся части границы со значениями на многообразии, лежащем строго внутри области. Данная задача решена сведением к интегральному уравнению Фредгольма второго рода и применением принципа максимума. В случае произвольной области и общих нелокальных условий задача была сформулирована как нерешенная.

Различные варианты и обобщения нелокальных задач, которые содержат преобразования переменных, отображающие границу внутрь замыкания области, рассматривали А.К. Гущин и В.П. Михайлов, Н.В. Житарашу и С.Д. Эйдельман, В.А. Ильин и Е.И. Моисеев[9], Л.И. Камынин, К.Ю. Кишкис, Я.А. Ройтберг и З.Г. Шефтель[10] и др.; при этом особое внимание уделялось разрешимости соответствующих нелокальных задач. Спектральные свойства нелокальных задач исследовались В.А. Ильиным[11], Е.И. Моисеевым[12], А.А. Шкаликовым[13]. Отметим, что в работах вышеперечисленных авторов рассматривались те или иные частные случаи нелокальных задач.

Основы общей теории для эллиптических уравнений порядка $2m$ с нелокальными краевыми условиями общего вида были заложены в работах А.Л. Скубачевского[14] [15] [16] [17] [18]: приведена классификация по типу нелокальных условий, доказаны априорные оценки и построен правый регуляризатор в соответствующих пространствах, для определенных классов нелокальных задач изучены спектральные свойства и свойства индексов соответствующих операторов, получена асимптотика решений, разработаны методы исследования гладкости обобщенных решений. При этом результаты оказались новыми даже в случае плоской области и эллиптического оператора 2-го порядка.

Наиболее сложной является ситуация, когда носитель нелокальных членов имеет непустое пересечение с границей области. В этом случае обобщенное решение нелокальной задачи может

[1]Бицадзе А.В., Самарский А.А. Докл. АН СССР. 1969. Т. 185. № 4. С. 739–740.
[2]Feller W. Ann. of Math. 1952. V. 55. P. 468–519.
[3]Онанов Г.Г., Скубачевский А.Л. Прикладная механика. 1979. Т. 15. № 5. С. 39–47.
[4]Carleman T. Verhandlungen des Internat. Math. Kongr. Zürich. 1932. Bd. 1. P. 132–151.
[5]Beals R. Bull. Amer. Math. Soc. 1964. V. 70. № 5. P. 693–696.
[6]Browder F. Amer. J. Math. 1964. V. 86. P. 735–750.
[7]Вишик М.И. Труды ММО. 1952. Т. 1. С. 187–246.
[8]Бицадзе А.В., Самарский А.А. Докл. АН СССР. 1969. Т. 185. № 4. С. 739–740.
[9]Ильин В.А., Моисеев Е.И. Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 5. С. 795–804.
[10]Ройтберг Я.А., Шефтель З.Г. Сиб. матем. журн. 1972. Т. 13, № 1. Р. 165–181.
[11]Ильин В.А. Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 12. С. 2059–2071.
[12]Моисеев Е.И. Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 12. С. 2082–2093.
[13]Шкаликов А.А. Вестн. МГУ. Сер. мат. и мех. 1982. № 6. С. 12–21.
[14]Скубачевский А.Л. Мат. сб. 1986. Т. 129 (171). №2. С. 279–302.
[15]Скубачевский А.Л. Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. №1. С. 120–131.
[16]Скубачевский А.Л. Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. №1. С. 128–139.
[17]Skubachevskii A.L. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1991. V. 160. № 2. P. 323–341.
[18]Skubachevskii A.L. Russian J. of Mathematical Physics. 2001. V. 8. P. 365–374.

иметь степенные особенности вблизи некоторых точек даже при бесконечно гладкой границе области и бесконечно дифференцируемой правой части. Недостаточно исследованными здесь остаются вопросы разрешимости нелокальных эллиптических задач, а также гладкости решений в соответствующих функциональных пространствах. Именно эти вопросы рассматриваются в диссертации.

Цель работы

Целью диссертационной работы является: 1) доказательство формулы Грина и изучение разрешимости нелокальных эллиптических задач в бесконечных углах (такие задачи возникают в качестве модельных в случае ограниченной области), 2) получение асимптотики решений нелокальных задач в плоских углах и в плоской ограниченной области в случае, когда преобразования переменных в нелокальных членах содержат как поворот, так и растяжение, а также нахождение явных формул для коэффициентов в асимптотике решений.

Новизна результатов

1. В диссертации впервые получены необходимые и достаточные условия фредгольмовой и однозначной разрешимости нелокальных эллиптических задач в плоских и двугранных углах соответственно. Ранее было известно лишь достаточное условие, содержащее дополнительное ограничение на “локальную” задачу, соответствующую рассматриваемой нелокальной задаче (см. сноску 15). При этом новым является также метод исследования, включающий в себя вывод формулы Грина для нелокальных задач в углах и изучение сопряженных нелокальных задач в весовых пространствах В.А. Кондратьева.

2. Получена асимптотика решений нелокальных краевых задач в плоских углах и в плоских ограниченных областях для случая произвольных линейных вблизи некоторых особых точек области преобразований переменных в нелокальных условиях. Ранее подобная асимптотика была получена для преобразований переменных, содержащих лишь поворот (см. сноску 14).

3. Впервые выведены формулы для вычисления коэффициентов в асимптотике решений нелокальных задач в плоских углах и в плоских ограниченных областях. Показано, что значения коэффициентов, так же, как и общий вид асимптотики, зависят не только от данных задачи вблизи рассматриваемой точки, но и от данных вблизи некоторых других точек, лежащих как на границе, так и внутри области, и связанных с данной точкой посредством преобразований переменных в нелокальных членах.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы (54 наименования). Общий объем диссертации — 154 страницы.

В первой главе изучаются нелокальные эллиптические задачи в бесконечных углах: выводится формула Грина, порождающая формально сопряженные нелокальные задачи трансмиссии; доказываются априорные оценки решений нелокальных задач трансмиссии в весовых пространствах В.А. Кондратьева; доказываются теоремы о гладкости решений сопряженных (в смысле теории операторов) нелокальных задач; устанавливается связь между сопряженными задачами и нелокальными задачами трансмиссии. Все это позволяет получить необходимые и достаточные условия фредгольмовой и однозначной разрешимости нелокальных краевых задач в плоских и в двугранных углах соответственно.

Во второй главе получена асимптотика решений нелокальных эллиптических задач в плоских углах. Для вычисления коэффициентов в асимптотике решений выводятся явные формулы в терминах собственных и присоединенных векторов как сопряженных нелокальных задач, так и нелокальных задач трансмиссии, изученных в первой главе.

Результаты второй главы применяются в третьей главе, где найдена асимптотика решений нелокальных эллиптических задач в плоских ограниченных областях и получены формулы для вычисления коэффициентов в асимптотике решений. Показано, что значения коэффициентов, так же, как и общий вид асимптотики, зависят не только от данных задачи вблизи рассматриваемой точки, но и от данных вблизи некоторых других точек, лежащих как на границе, так и внутри области, и связанных с данной точкой посредством преобразований переменных.

Содержание диссертации

Содержание диссертации для наглядности будет изложено на простейшем примере — нелокальном возмущении задачи Дирихле для оператора Лапласа. Однако отметим, что в диссертации аналогичные результаты доказаны для произвольных эллиптических уравнений порядка $2m$ с общими нелокальными условиями. О других обобщениях будет сказано по ходу изложения материала.

Глава 1. Нелокальные эллиптические задачи в двугранных и плоских углах. Формула Грина

1. В первой главе диссертации изучается разрешимость нелокальных эллиптических задач в двугранных и плоских углах. Такие задачи возникают в качестве модельных при изучении нелокальных эллиптических задач в ограниченных областях (см. сноску 16).

Введем двугранный угол $\Xi = \{x = (y,\ z) :\ \ r > 0,\ b_1 < \omega < b_2,\ z \in \mathbb{R}^{n-2}\}$ с гранями $\Gamma_\sigma = \{x = (y,\ z) :\ \ r > 0,\ \omega = b_\sigma,\ z \in \mathbb{R}^{n-2}\}$ $(\sigma = 1,\ 2)$ и ребром $M = \{x = (y,\ z) :\ \ y = 0,\ z \in \mathbb{R}^{n-2}\}$. Здесь $x = (y,\ z) \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^2,\ z \in \mathbb{R}^{n-2}$; $(\omega,\ r)$ — полярные координаты точки y; $-\pi < b_1 < b_2 < \pi$.

В гл. 1 изучается следующая нелокальная краевая задача в двугранном угле Ξ:

$$\Delta\mathcal{U}(x) = f(x) \quad (x \in \Xi), \tag{1.1}$$

$$\mathcal{U}(x)|_{\Gamma_\sigma} + e_\sigma \mathcal{U}(\mathcal{G}_\sigma y,\ z)|_{\Gamma_\sigma} = g_\sigma(x) \quad (x \in \Gamma_\sigma). \tag{1.2}$$

Здесь и далее индекс σ изменяется следующим образом: $\sigma = 1,\ 2$; $e_\sigma \in \mathbb{C}$; $\mathcal{G}_\sigma$ есть оператор поворота на угол ω_σ и растяжения в β_σ раз в плоскости $\{y\}$. При этом $b_1 < b_1 + \omega_1 = b_2 + \omega_2 = b < b_2,\ 0 < \beta_\sigma$[19].

Введем пространство $H_a^l(\Xi)$ как пополнение множества $C_0^\infty(\bar{\Xi}\backslash M)$ по норме $\|w\|_{H_a^l(\Xi)} = \left(\sum\limits_{|\alpha|\le l} \int\limits_\Xi r^{2(a-l+|\alpha|)} |D_x^\alpha w(x)|^2 dx\right)^{1/2}$, где $C_0^\infty(\bar{\Xi}\backslash M)$ — множество бесконечно дифференцируемых в $\bar{\Xi}$ функций с компактными носителями из $\bar{\Xi}\backslash M$; $a \in \mathbb{R}$, $l \ge 0$ — целое. Через $H_a^{l-1/2}(\Gamma')$ при $l \ge 1$ обозначим пространство следов на $\Gamma' = \{x = (y,\ z) : r > 0,\ \omega = b',\ z \in \mathbb{R}^{n-2}\}$ $(b_1 \le b' \le b_2)$ с нормой $\|\psi\|_{H_a^{l-1/2}(\Gamma')} = \inf \|w\|_{H_a^l(\Xi)}$ $(w \in H_a^l(\Xi) :\ \ w|_{\Gamma'} = \psi)$. Введем соответствующий задаче (1.1), (1.2) ограниченный оператор $\mathcal{L}_\Xi : H_a^2(\Xi) \to H_a^0(\Xi,\ \Gamma) = H_a^0(\Xi) \times \prod\limits_\sigma H_a^{3/2}(\Gamma_\sigma)$[20] по формуле $\mathcal{L}_\Xi \mathcal{U} = \{\Delta\mathcal{U},\ \mathcal{U}(x)|_{\Gamma_\sigma} + e_\sigma \mathcal{U}(\mathcal{G}_\sigma y,\ z)|_{\Gamma_\sigma}\}$.

Для изучения задачи (1.1), (1.2) в двугранном угле рассмотрим вспомогательную нелокальную краевую задачу в плоском угле:

$$\Delta u(y) - u(y) = f(y) \quad (y \in K), \tag{1.3}$$

$$u(y)|_{\gamma_\sigma} + e_\sigma u(\mathcal{G}_\sigma y)|_{\gamma_\sigma} = g_\sigma(y) \quad (y \in \gamma_\sigma), \tag{1.4}$$

где $K = \{y \in \mathbb{R}^2 :\ \ r > 0,\ -\pi < b_1 < \omega < b_2 < \pi\}$, $\gamma_\sigma = \{y \in \mathbb{R}^2 :\ \ r > 0,\ \omega = b_\sigma\}$. Задача (1.3), (1.4) получается из задачи (1.1), (1.2) при помощи преобразования Фурье $z \to \eta$ и последующей замены переменных $y \to y\eta$.

[19] В диссертации изучается эллиптическая система уравнений в N двугранных углах с нелокальными преобразованиями, отображающими грани j-го угла в $(n-1)$-мерные полуплоскости, лежащие строго внутри k-го угла $(j,\ k = 1,\ \ldots,\ N)$.

[20] В диссертации рассматривается оператор $\mathcal{L}_\Xi : H_a^{l+2}(\Xi) \to H_a^l(\Xi) \times \prod\limits_\sigma H_a^{l+3/2}(\Gamma_\sigma)$ при любых $l \ge 0$.

Введем пространство $E_a^l(K)$ как пополнение $C_0^\infty(\bar{K}\backslash\{0\})$ по норме $\|w\|_{E_a^l(K)} = \left(\sum\limits_{|\alpha|\le l}\int\limits_K r^{2a}(r^{2(|\alpha|-l)}+1)|D_y^\alpha w(y)|^2dy\right)^{1/2}$. Через $E_a^{l-1/2}(\gamma')$ при $l\ge 1$ обозначим пространство следов на луче $\gamma'=\{y\in\mathbb{R}^2:\ r>0,\ \varphi=b'\}$ $(b_1\le b'\le b_2)$ с нормой $\|\psi\|_{E_a^{l-1/2}(\gamma')}=\inf\|w\|_{E_a^l(K)}$ $(w\in E_a^l(K):\ w|_{\gamma'}=\psi)$. Конструктивные определения следовых пространств $H_a^{l-1/2}(\Gamma')$ и $E_a^{l-1/2}(\gamma')$ см. в работе[21].

Введем соответствующий задаче (1.3), (1.4) ограниченный оператор $\mathcal{L}_K:\ E_a^2(K)\to E_a^0(K,\ \gamma)=E_a^0(K)\times\prod\limits_\sigma E_a^{3/2}(\gamma_\sigma)$ по формуле $\mathcal{L}_K u=\{\Delta u-u,\ u(y)|_{\gamma_\sigma}+e_\sigma u(\mathcal{G}_\sigma y)|_{\gamma_\sigma}\}$.

Рассмотрим модельную аналитическую оператор–функцию $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda): W^2(b_1,\ b_2)\to W^0[b_1,\ b_2]=L_2(b_1,\ b_2)\times\mathbb{C}^2$, действующую по формуле

$$\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)\tilde{\mathcal{U}}=\left\{\frac{d^2}{d\omega^2}\tilde{\mathcal{U}}(\omega)-\lambda^2\tilde{\mathcal{U}}(\omega),\ \tilde{\mathcal{U}}(\omega)|_{\omega=b_\sigma}+e_\sigma e^{i\lambda\ln\beta_\sigma}\tilde{\mathcal{U}}(\omega+\omega_\sigma)|_{\omega=b_\sigma}\right\}^{22}. \tag{1.5}$$

Оператор $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ получается из оператора $\mathcal{L}_K$ путем отбрасывания младших членов, перехода к полярным координатам $(\omega,\ r)$ и последующего преобразования Меллина $r\to\lambda$.

В работе А.Л. Скубачевского (см. сноску 15) доказан следующий результат.

Лемма 1.1. *Пусть на прямой* $\mathrm{Im}\ \lambda=a-1$ *нет собственных чисел оператор–функции* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. *Тогда для всех* $u\in E_a^2(K)$

$$\|u\|_{E_a^2(K)}\le c\big(\|\mathcal{L}_K u\|_{E_a^0(K,\ \gamma)}+\|u\|_{L_2(K\cap S)}\big), \tag{1.6}$$

где $S=\{y\in\mathbb{R}^2:\ 0<R_1<r<R_2\}$; $c>0$ *не зависит от* u.

Если для всех $u\in E_a^2(K)$ *имеет место оценка (1.6), то на прямой* $\mathrm{Im}\ \lambda=a-1$ *нет собственных чисел оператор–функции* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$.

Из леммы 1.1 вытекает конечномерность ядра и замкнутость образа оператора $\mathcal{L}_K$. Для доказательства конечномерности коядра оператора $\mathcal{L}_K$ получим формулы Грина для нелокальных задач и изучим сопряженные нелокальные задачи.

2. Введем множество $\gamma=\{y\in\mathbb{R}^2:\ r>0,\ \omega=b\}$ (напомним: $b=b_\sigma+\omega_\sigma$). Множество γ является носителем нелокальных данных в задаче (1.3), (1.4). Обозначим $K_1=\{y\in\mathbb{R}^2:\ r>0,\ b_1<\omega<b\}$, $K_2=\{y\in\mathbb{R}^2:\ r>0,\ b<\omega<b_2\}$. Пусть n_σ есть нормаль к γ_σ, направленная вне области K_σ, n — нормаль к γ, направленная вне области K_2. Будем обозначать через $(\cdot,\ \cdot)_K$, $(\cdot,\ \cdot)_{K_\sigma}$, $(\cdot,\ \cdot)_{\gamma_\sigma}$, $(\cdot,\ \cdot)_\gamma$ скалярные произведения в $L_2(K)$, $L_2(K_\sigma)$, $L_2(\gamma_\sigma)$, $L_2(\gamma)$ соответственно.

В § 1.4 получена формула Грина для нелокальных эллиптических задач.

Теорема 1.1. *Для* $u\in C_0^\infty(\bar{K}\backslash\{0\})$, $v_\sigma\in C^\infty(\bar{K}_\sigma\backslash\{0\})$ *имеет место формула Грина*

$$\Big(\Delta u-u,\ v\Big)_K+\sum_\sigma\Big(u|_{\gamma_\sigma}+e_\sigma u(\mathcal{G}_\sigma y)|_{\gamma_\sigma},\ \frac{\partial v_\sigma}{\partial n_\sigma}\Big|_{\gamma_\sigma}\Big)_{\gamma_\sigma}+$$
$$+\Big(u|_\gamma,\ \frac{\partial v_2}{\partial n}\Big|_\gamma-\frac{\partial v_1}{\partial n}\Big|_\gamma-\sum_k\bar{e}_k\beta_k^{-1}\frac{\partial v_k}{\partial n_k}(\mathcal{G}_k^{-1}y)\Big|_\gamma\Big)_\gamma=$$
$$=\sum_\sigma\Big(u,\ \Delta v_\sigma-v_\sigma\Big)_{K_\sigma}+\sum_\sigma\Big(\frac{\partial u}{\partial n_\sigma}\Big|_{\gamma_\sigma},\ v_\sigma|_{\gamma_\sigma}\Big)_{\gamma_\sigma}+\Big(\frac{\partial u}{\partial n}|_\gamma,\ v_2|_\gamma-v_1|_\gamma\Big)_\gamma, \tag{1.7}$$

где $v(y)\equiv v_\sigma(y)$ *при* $y\in K_\sigma$; $\mathcal{G}_k^{-1}$ *— оператор поворота на угол* $-\omega_k$ *и растяжения в* β_k^{-1} *раз в плоскости* $\{y\}$; *индекс* k *здесь и далее изменяется следующим образом:* $k=1,\ 2$.

[21] Мазья В.Г., Пламеневский Б.А. Тр. Моск. мат. о–ва. 1978. Т. 37. С. 49–93.

[22] Здесь и далее через $W^l(b_1,\ b_2)$ обозначается пространство Соболева функций, имеющих все обобщенные производные до порядка l включительно из пространства $L_2(b_1,\ b_2)$.

3. Формула (1.7) порождает задачу, формально сопряженную к задаче (1.3), (1.4):

$$\Delta v_\sigma(y) - v_\sigma(y) = f_\sigma(y) \quad (y \in K_\sigma), \tag{1.8}$$

$$\begin{gathered} v_\sigma|_{\gamma_\sigma} = g_\sigma(y) \quad (y \in \gamma_\sigma), \\ v_2|_\gamma - v_1|_\gamma = h_1(y),\ \frac{\partial v_2}{\partial n}\Big|_\gamma - \frac{\partial v_1}{\partial n}\Big|_\gamma - \sum_k \bar e_k \beta_k^{-1} \frac{\partial v_k}{\partial n_k}(\mathcal{G}_k^{-1} y)\Big|_\gamma = h_2(y) \quad (y \in \gamma). \end{gathered} \tag{1.9}$$

Задачу (1.8), (1.9) назовем нелокальной задачей трансмиссии в плоском угле K.

Положим $\mathcal{E}^0_{-a+2}(K,\ \gamma) = E^0_{-a+2}(K) \times \prod\limits_{\sigma=1,2} E^{3/2}_{-a+2}(\gamma_\sigma) \times \prod\limits_{\nu=0,1} E^{3/2-\nu}_{-a+2}(\gamma)$. Обозначим также $\mathcal{E}^2_{-a+2}(K) = \bigoplus\limits_{\sigma=1,2} E^2_{-a+2}(K_\sigma)$. Рассмотрим соответствующий задаче (1.8), (1.9) ограниченный оператор $\mathcal{M}_K : \mathcal{E}^2_{-a+2}(K) \to \mathcal{E}^0_{-a+2}(K,\ \gamma)$, действующий по формуле

$$\mathcal{M}_K v = \Big\{ w - v,\ v_\sigma|_{\gamma_\sigma},\ v_2|_\gamma - v_1|_\gamma,\ \frac{\partial v_2}{\partial n}\Big|_\gamma - \frac{\partial v_1}{\partial n}\Big|_\gamma - \sum_k \bar e_k \beta_k^{-1} \frac{\partial v_k}{\partial n_k}(\mathcal{G}_k^{-1} y)\Big|_\gamma \Big\}.$$

Здесь и далее v_σ есть сужение функции $v \in \mathcal{E}^2_{-a+2}(K)$ на K_σ, $w \equiv \Delta v_\sigma$ при $y \in K_\sigma$. (Отметим, что запись "$w \equiv \Delta v$ при $y \in K$" была бы некорректна, так как функция $v \in \mathcal{E}^2_{-a+2}(K)$ может иметь "разрыв" на γ.)

В § 1.7 доказана априорная оценка решений задачи (1.8), (1.9).

Лемма 1.2. *Пусть на прямой* $\operatorname{Im}\lambda = a - 1$ *нет собственных чисел оператор–функции* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. *Тогда для всех* $v \in \mathcal{E}^2_{-a+2}(K)$

$$\|v\|_{\mathcal{E}^2_{-a+2}(K)} \le c\big(\|\mathcal{M}_K v\|_{\mathcal{E}^0_{-a+2}(K,\ \gamma)} + \|v\|_{L_2(K \cap S')}\big), \tag{1.10}$$

где $S' = \{y \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < R_1' < r < R_2'\}$; $c > 0$ *не зависит от* v.

Если для всех $v \in \mathcal{E}^2_{-a+2}(K)$ *имеет место оценка (1.10), то на прямой* $\operatorname{Im}\lambda = a - 1$ *нет собственных чисел оператор–функции* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$.

Из леммы 1.2 следует, что оператор $\mathcal{M}_K$ имеет конечномерное ядро и замкнутый образ.

Далее, в § 1.9, при помощи формулы Грина (1.7) устанавливается связь между ядрами операторов $\mathcal{M}_K$ и $\mathcal{L}_K^*$. Здесь $\mathcal{L}_K^* : E^0_a(K,\ \gamma)^* \to E^2_a(K)^*$ — оператор, сопряженный с $\mathcal{L}_K$. Оператор $\mathcal{L}_K^*$ действует на $\{f,\ g_\sigma\} \in E^0_a(K,\ \gamma)^*$ для любых $u \in E^2_a(K)$ по формуле

$$< u,\ \mathcal{L}_K^*\{f,\ g_\sigma\} >= (\triangle u - u,\ f)_K + \sum_\sigma < u|_{\gamma_\sigma} + e_\sigma u(\mathcal{G}_\sigma y)|_{\gamma_\sigma},\ g_\sigma >_{\gamma_\sigma} .$$

Здесь $< \cdot,\ \cdot >_{\gamma_\sigma}$ обозначает полуторалинейную форму на паре $E^{3/2}_a(\gamma_\sigma)$, $E^{3/2}_a(\gamma_\sigma)^*$.

Лемма 1.3. *Ядро оператора* $\mathcal{L}_K^*$ *совпадает с множеством, которое пробегает элемент* $\{v,\ \frac{\partial v_\sigma}{\partial n_\sigma}\Big|_{\gamma_\sigma}\}$, *когда* $v \in \mathcal{E}^2_{-a+2}(K)$, $v_\sigma \in C^\infty(\bar K_\sigma \backslash \{0\})$ *и удовлетворяет задаче (1.8), (1.9) при* $\{f,\ g_\sigma,\ h_\nu\} = 0$. *Здесь* $v(y) \equiv v_\sigma(y)$, $f(y) \equiv f_\sigma(y)$ *при* $y \in K_\sigma$.

4. В § 1.10 содержатся основные результаты гл. 1. При помощи лемм 1.1, 1.2 и 1.3 устанавливается необходимое и достаточное условие фредгольмовой разрешимости задачи (1.3), (1.4).

Теорема 1.2. *Оператор* $\mathcal{L}_K$ *фредгольмов тогда и только тогда, когда на прямой* $\operatorname{Im}\lambda = a-1$ *нет собственных чисел оператор–функции* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$.

Далее изучается разрешимость нелокальной задачи (1.1), (1.2) в двугранном угле. А.Л. Скубачевским (см. сноску 15) доказано следующее достаточное условие однозначной разрешимости задачи (1.1), (1.2).

Теорема 1.3. *Пусть на прямой* $\operatorname{Im}\lambda = a-1$ *нет собственных чисел оператор–функции* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ *и* $\dim\ker\mathcal{L}_K = \operatorname{codim}\mathcal{R}(\mathcal{L}_K) = 0$. *Тогда оператор* $\mathcal{L}_\Xi$ *есть изоморфизм.*

При помощи формулы Грина для нелокальной задачи (1.1), (1.2) в двугранном угле Ξ, аналогичной формуле Грина (1.7) для задачи (1.3), (1.4) в плоском угле K, в § 1.10 получено следующее необходимое условие фредгольмовости оператора $\mathcal{L}_\Xi$.

Теорема 1.4. *Если оператор* $\mathcal{L}_\Xi$ *фредгольмов, то оператор* $\mathcal{L}_K$ *есть изоморфизм.*

Из леммы 1.1 и теорем 1.3, 1.4 следует, что если $\mathcal{L}_\Xi$ фредгольмов, то он изоморфизм.

Глава 2. Асимптотика решений нелокальных эллиптических задач в плоских углах

1. Во второй главе диссертации изучается асимптотика решений нелокальных эллиптических задач в плоских углах. Результаты работы А.Л. Скубачевского (см. сноску 14) обобщаются на случай преобразований переменных, содержащих как поворот, так и растяжение аргумента. Выводятся явные формулы для коэффициентов в асимптотике решений как в терминах сопряженных нелокальных операторов, так и в терминах формулы Грина, полученной в гл. 1. Доказанные здесь результаты будут использованы в гл. 3 при изучении асимптотики решений нелокальных задач в плоских ограниченных областях.

Пусть $K = \{y \in \mathbb{R}^2 :\ r > 0,\ b_1 < \omega < b_2\}$ — плоский угол со сторонами $\gamma_\sigma = \{y \in \mathbb{R}^2 :\ r > 0,\ \omega = b_\sigma\}$ $(\sigma = 1,\ 2)$, где $-\pi < b_1 < b_2 < \pi$.

Рассмотрим в плоском угле K нелокальную краевую задачу

$$\Delta\mathcal{U} = f(y) \quad (y \in K), \tag{2.1}$$

$$\mathcal{U}(y)|_{\gamma_\sigma} + e_\sigma\mathcal{U}(\mathcal{G}_\sigma y)|_{\Gamma_\sigma} = g_\sigma(y) \quad (y \in \gamma_\sigma;\ \sigma = 1,\ 2). \tag{2.2}$$

Здесь $\mathcal{G}_\sigma$ — оператор поворота на угол ω_σ и растяжения в β_σ раз в плоскости $\{y\}$, так, что $b_1 < b_1 + \omega_1 = b_2 + \omega_2 = b < b_2$, $0 < \beta_\sigma$.

Аналогично предыдущему вводятся пространства функций $H_a^l(K)$ и $H_a^{l-1/2}(\gamma')$, где $\gamma' = \{y \in \mathbb{R}^2 :\ r > 0,\ \varphi = b'\}$ $(b_1 \le b' \le b_2)$.

Введем соответствующий нелокальной задаче (2.1), (2.2) ограниченный оператор $\mathcal{L} : H_a^2(K) \to H_a^0(K,\ \gamma) = H_a^0(K) \times \prod\limits_\sigma H_a^{3/2}(\gamma_\sigma)$ по формуле $\mathcal{L}\mathcal{U} = \{\Delta\mathcal{U},\ \mathcal{U}(y)|_{\gamma_\sigma} + e_\sigma\mathcal{U}(\mathcal{G}_\sigma y)|_{\gamma_\sigma}\}$. Отметим, что в отличие от оператора $\mathcal{L}_K$ из гл. 1, который соответствовал вспомогательной задаче (1.1), (1.2) с младшими членами и действовал в пространствах $E_a^l(K)$, оператор $\mathcal{L}$ соответствует задаче без младших членов и действует в пространствах $H_a^l(K)$.

Изучается асимптотика решения $u \in H_a^2(K)$ задачи (2.1), (2.2) с правой частью $\{f,\ g_\sigma\} \in H_a^0(K,\ \gamma) \cap H_{a_1}^0(K,\ \gamma)$. Указанная асимптотика существенным образом зависит от расположения собственных чисел оператор–функции $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda) : W^2(b_1,\ b_2) \to W^0[b_1,\ b_2]$, действующей по формуле (1.5).

Напомним некоторые известные определения и факты[23], необходимые для изучения асимптотики решений. Голоморфная в точке λ_0 вектор–функция $\varphi(\lambda)$ со значениями в $W^2(b_1,\ b_2)$, такая, что $\varphi(\lambda_0) \ne 0$, называется *корневой функцией* оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ в точке λ_0, если вектор–функция $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)\varphi(\lambda)$ обращается в этой точке в нуль. Если $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ имеет хотя бы одну корневую функцию в точке λ_0, то λ_0 называется *собственным числом* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. Кратность нуля вектор–функции $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)\varphi(\lambda)$ в точке λ_0 называется *кратностью корневой функции* $\varphi(\lambda)$, а вектор $\varphi^{(0)} = \varphi(\lambda_0)$ — *собственным вектором*, отвечающим числу λ_0. Пусть $\varphi(\lambda)$ — корневая функция в точке λ_0 кратности $\varkappa$ и $\varphi(\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^j\varphi^{(j)}$. Тогда векторы $\varphi^{(1)},\ \ldots,\ \varphi^{(\varkappa-1)}$ называются *присоединенными к собственному вектору* φ_0, а упорядоченный набор $\varphi^{(0)},\ \ldots,\ \varphi^{(\varkappa-1)}$ — *жордановой*

[23]Гохберг И.Ц., Сигал Е.И. Мат. сб. 1971. Т. 84(126), №4. С. 607–629.

цепочкой, отвечающей числу λ_0. *Рангом* собственного вектора $\varphi^{(0)}$ ($\operatorname{rank}\varphi^{(0)}$) называется максимальная из кратностей всех корневых функций, таких, что $\varphi(\lambda_0) = \varphi^{(0)}$.

Из результатов работы А.Л. Скубачевского (см. сноску 15) следует, что все собственные числа оператор–функции $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ изолированы; при этом $\dim\ker\tilde{\mathcal{L}}(\lambda_0) < \infty$ для любого собственного числа λ_0 и ранги всех собственных векторов конечны. Пусть $J = \dim\ker\tilde{\mathcal{L}}(\lambda_0)$ и $\varphi^{(0,1)}, \ \dots, \ \varphi^{(0,J)}$ — такая система линейно независимых собственных векторов, что $\operatorname{rank}\varphi^{(0,1)}$ — максимальный из рангов всех собственных векторов, отвечающих числу λ_0, а $\operatorname{rank}\varphi^{(0,j)}$ ($j = 2, \ \dots, \ J$) — максимальный из рангов собственных векторов из какого-нибудь прямого дополнения в $\ker\tilde{\mathcal{L}}(\lambda_0)$ к линейной оболочке векторов $\varphi^{(0,1)}, \ \dots, \ \varphi^{(0,j-1)}$. Числа $\varkappa_j = \operatorname{rank}\varphi^{(0,j)}$ называют *частными кратностями* собственного числа λ_0, а сумму $\varkappa_1 + \dots + \varkappa_J$ — *(полной) кратностью* λ_0. Если для каждого $j = 1, \ \dots, \ J$ векторы $\varphi^{(0,j)}, \ \dots, \ \varphi^{(\varkappa_j - 1,j)}$ образуют жорданову цепочку, то набор векторов $\{\varphi^{(0,j)}, \ \dots, \ \varphi^{(\varkappa_j-1,j)} : j = 1, \ \dots, \ J\}$ называется *канонической системой жордановых цепочек*, отвечающей собственному числу λ_0.

Теперь мы можем сформулировать результат об асимптотическом представлении решений нелокальной задачи (2.1), (2.2), доказанный в § 2.1.

Теорема 2.1. *Пусть* $\{f, \ g_\sigma\} \in H_a^0(K, \ \gamma) \cap H_{a_1}^0(K, \ \gamma)$, *и пусть прямые* $\operatorname{Im}\lambda = a_1 - 1$, $\operatorname{Im}\lambda = a - 1$ *не содержат собственных чисел оператор–функции* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. *Если* $\mathcal{U}$ *— решение задачи (2.1), (2.2) из пространства* $H_a^2(K)$, *то*

$$\mathcal{U}(\omega, \ r) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=1}^{J_n} \sum_{k=0}^{\varkappa_{j,n}-1} c_n^{(k,j)} \mathcal{U}_n^{(k,j)}(\omega, \ r) + \mathcal{U}_1(\omega, \ r). \tag{2.3}$$

Здесь $\lambda_1, \ \dots, \ \lambda_N$ *— собственные числа* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, *заключенные между прямыми* $\operatorname{Im}\lambda = a_1 - 1$ *и* $\operatorname{Im}\lambda = a - 1$;

$$\mathcal{U}_n^{(k,j)}(\omega, \ r) = r^{i\lambda_n} \sum_{q=0}^{k} \frac{1}{q!} (i \ln r)^q \varphi_n^{(k-q,j)}(\omega) \tag{2.4}$$

— степенные (порядка k*) решения однородной задачи (2.1), (2.2);* $\{\varphi_n^{(0,j)}, \ \dots, \ \varphi_n^{(\varkappa_{j,n}-1,j)} : j = 1, \ \dots, \ J_n\}$ *— каноническая система жордановых цепочек оператор–функции* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, *отвечающая собственному числу* λ_n, $n = 1, \ \dots, \ N$; $c_n^{(k,j)}$ *— некоторые константы;* $\mathcal{U}_1$ *— решение задачи (2.1), (2.2) из пространства* $H_{a_1}^2(K)$.

Если в полосе между прямыми $\operatorname{Im}\lambda = a_1 - 1$ *и* $\operatorname{Im}\lambda = a - 1$ *нет собственных чисел* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, *то* $\mathcal{U} \in H_{a_1}^2(K)$.

Таким образом, если $a > a_1$, формула (2.3) дает асимптотику решения $\mathcal{U}$ при $r \to 0$, а если $a < a_1$ — асимптотику решения $\mathcal{U}$ при $r \to \infty$.

2. Для вычисления констант $c_\nu^{(k,j)}$ в асимптотической формуле (2.3) нам потребуются операторы, сопряженные с операторами нелокальных задач.

Рассмотрим оператор $\tilde{\mathcal{L}}^*(\lambda) : W^0[b_1, \ b_2]^* \to W^2(b_1, \ b_2)^*$, сопряженный с оператором $\tilde{\mathcal{L}}(\bar{\lambda})$ относительно расширения скалярного произведения в $L_2(b_1, \ b_2) \times \mathbb{C}^2$. Оператор $\tilde{\mathcal{L}}^*(\lambda)$ действует на $\{\psi, \ \chi_\sigma\} \in W^0[b_1, \ b_2]^*$ для всех $\varphi \in W^2(b_1, \ b_2)$ по формуле

$$< \varphi, \ \tilde{\mathcal{L}}^*(\lambda)\{\psi, \ \chi_\sigma\} >= (\tilde{\mathcal{P}}(\bar{\lambda})\varphi, \ \psi)_{L_2(b_1, \ b_2)} + \sum_\sigma (\tilde{\mathcal{B}}_\sigma(\bar{\lambda})\varphi, \ \chi_\sigma)_{\mathbb{C}},$$

где $\tilde{\mathcal{P}}(\lambda)\varphi = \dfrac{d^2}{d\omega^2}\varphi(\omega) - \lambda^2\varphi(\omega)$, $\tilde{\mathcal{B}}_\sigma(\lambda)\varphi = \varphi(\omega)|_{\omega=b_\sigma} + e_\sigma e^{i\lambda \ln \beta_\sigma}\varphi(\omega + \omega_\sigma)|_{\omega=b_\sigma}$.

В дальнейшем нам понадобится специальный выбор жордановых цепочек, удовлетворяющих условиям биортогональности и нормировки. Такие цепочки описываются в следующей лемме (см. § 2.3).

Лемма 2.1. *Пусть собственному числу λ_0 оператор–функции $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ отвечает каноническая система жордановых цепочек*

$$\{\varphi^{(0,j)},\ \ldots,\ \varphi^{(\varkappa_j-1,j)} : j = 1,\ \ldots,\ J\}.$$

Тогда существует такая каноническая система жордановых цепочек

$$\Big\{\{\psi^{(0,j)},\ \chi_\sigma^{(0,j)}\},\ \ldots,\ \{\psi^{(\varkappa_j-1,j)},\ \chi_\sigma^{(\varkappa_j-1,j)}\} : j = 1,\ \ldots,\ J\Big\}$$

оператор–функции $\tilde{\mathcal{L}}^*(\lambda)$, отвечающая числу $\bar{\lambda}_0$, что выполняются соотношения

$$\begin{gathered}\sum_{p=0}^{\nu}\sum_{q=0}^{k}\frac{1}{(\nu+k+1-p-q)!}\Big\{(\partial_\lambda^{\nu+k+1-p-q}\tilde{\mathcal{P}}(\lambda_0)\varphi^{(q,\xi)},\ \psi^{(p,\zeta)})_{(b_1,\ b_2)}+\\ +\sum_\sigma(\partial_\lambda^{\nu+k+1-p-q}\tilde{\mathcal{B}}_\sigma(\lambda_0)\varphi^{(q,\xi)},\ \chi_\sigma^{(p,\zeta)})_{\mathbb{C}}\Big\} = \delta_{\xi,\zeta}\delta_{\varkappa_\xi-k-1,\nu},\end{gathered} \tag{2.5}$$

где $\zeta,\ \xi = 1,\ \ldots,\ J$; $\nu = 0,\ \ldots,\ \varkappa_\zeta - 1$; $k = 0,\ \ldots,\ \varkappa_\xi - 1$; $\delta_{p,q}$ — символ Кронекера.

Обозначим $H_a^0(K,\ \gamma)^* = H_a^0(K)^* \times \prod\limits_\sigma H_a^{3/2}(\gamma_\sigma)^*$. Пусть $\mathcal{L}^* : H_a^0(K,\ \gamma)^* \to H_a^2(K)^*$ — оператор, сопряженный с $\mathcal{L}$ относительно расширения скалярного произведения в $L_2(K) \times \prod\limits_\sigma L_2(\gamma_\sigma)$. Оператор $\mathcal{L}^*$ действует на $\{\mathcal{V},\ \mathcal{W}_\sigma\} \in H_a^0(K,\ \gamma)^*$ для всех $\mathcal{U} \in H_a^2(K)$ по формуле

$$<\mathcal{U},\ \mathcal{L}^*\{\mathcal{V},\ \mathcal{W}_\sigma\}> = (\Delta\mathcal{U},\ \mathcal{V})_K + \sum_\sigma <\mathcal{U}(y)|_{\gamma_\sigma} + e_\sigma\mathcal{U}(\mathcal{G}_\sigma y)|_{\gamma_\sigma},\ \mathcal{W}_\sigma>_{\gamma_\sigma}. \tag{2.6}$$

Здесь и далее $<\cdot,\ \cdot>_{\gamma_\sigma}$ обозначает полуторалинейную форму на паре $H_a^{3/2}(\gamma_\sigma)$, $H_a^{3/2}(\gamma_\sigma)^*$.

Пусть $\bar{\lambda}_n$ — собственное число оператор–функции $\tilde{\mathcal{L}}^*(\lambda)$, заключенное между прямыми $\operatorname{Im}\lambda = a_1 - 1$ и $\operatorname{Im}\lambda = a - 1$ (см. теорему 2.1), и пусть

$$\Big\{\{\psi_n^{(0,j)},\ \chi_{\sigma,n}^{(0,j)}\},\ \ldots,\ \{\psi_n^{(\varkappa_{j,n}-1,j)},\ \chi_{\sigma,n}^{(\varkappa_{j,n}-1,j)}\} : j = 1,\ \ldots,\ J_n\Big\}$$

— жордановы цепочки $\tilde{\mathcal{L}}^*(\lambda)$, отвечающие числу $\bar{\lambda}_n$ и составляющие каноническую систему. В § 2.3 доказано, что функции

$$\{\mathcal{V}_n^{(\nu,j)},\ \mathcal{W}_{\sigma,n}^{(\nu,j)}\} = \Big\{r^{i\bar{\lambda}_n}\sum_{q=0}^{\nu}\frac{1}{q!}(i\ln r)^q\psi_n^{(\nu-q,j)},\ r^{i\bar{\lambda}_n-1}\sum_{q=0}^{\nu}\frac{1}{q!}(i\ln r)^q\chi_{\sigma,n}^{(\nu-q,j)}\Big\} \tag{2.7}$$

($\nu = 0,\ \ldots,\ \varkappa_{j,n} - 1$) являются решениями однородного уравнения

$$\mathcal{L}^*\{\mathcal{V},\ \mathcal{W}_\sigma\} = 0. \tag{2.8}$$

Функции (2.7) будем называть степенными решениями (порядка ν) уравнения (2.8).

В § 2.4 выводятся явные формулы для коэффициентов $c_n^{(k,j)}$ в асимптотической формуле (2.3). Вначале вычисляются коэффициенты при помощи степенных решений (2.7) однородного уравнения (2.8), а затем выводится представление коэффициентов в терминах формулы Грина, доказанной в гл. 1.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1; тогда коэффициенты $c_n^{(k,j)}$ из (2.3) вычисляются по формулам*

$$c_n^{(k,j)} = \Big(f,\ i\mathcal{V}_n^{(\varkappa_{j,n}-k-1,j)}\Big)_K + \sum_\sigma\Big(g_\sigma,\ i\mathcal{W}_{\sigma,n}^{(\varkappa_{j,n}-k-1,j)}\Big)_{\gamma_\sigma}, \tag{2.9}$$

где $\{\mathcal{V}_n^{(\nu,j)},\ \mathcal{W}_{\sigma,n}^{(\nu,j)}\}$ — *вектор, определенный равенством (2.7), причем жордановы цепочки*

$$\{\varphi_n^{(0,j)},\ \ldots,\ \varphi_n^{(\varkappa_{j,n}-1,j)} : j = 1,\ \ldots,\ J_n\},$$

$$\Big\{\{\psi_n^{(0,j)},\ \chi_{\sigma,n}^{(0,j)}\},\ \ldots,\ \{\psi_n^{(\varkappa_{j,n}-1,j)},\ \chi_{\sigma,n}^{(\varkappa_{j,n}-1,j)}\} : j = 1,\ \ldots,\ J_n\Big\},$$

фигурирующие в (2.4) и (2.7), подчинены условиям (2.5) биортогональности и нормировки.

3. Теперь вычислим коэффициенты в формуле (2.3) в терминах формулы Грина и формально сопряженной нелокальной задачи трансмиссии.

Формула Грина, аналогичная формуле (1.7) (но не содержащая младших членов в дифференциальном операторе), порождает задачу, формально сопряженную к задаче (2.1), (2.2):

$$\Delta v_\sigma(y) = f_\sigma(y) \quad (y \in K_\sigma), \tag{2.10}$$

$$v_\sigma|_{\gamma_\sigma} = g_\sigma(y) \quad (y \in \gamma_\sigma),$$
$$v_2|_\gamma - v_1|_\gamma = h_1(y),\ \frac{\partial v_2}{\partial n}\Big|_\gamma - \frac{\partial v_1}{\partial n}\Big|_\gamma - \sum_k \bar{e}_k \beta_k^{-1} \frac{\partial v_k}{\partial n_k}(\mathcal{G}_k^{-1}y)\Big|_\gamma = h_2(y) \quad (y \in \gamma) \tag{2.11}$$

(ср. с задачей (1.8), (1.9)).

Для заданных на интервале $(b_1,\ b_2)$ функций $\tilde{\mathcal{V}}(\omega)$ будем обозначать через $\tilde{\mathcal{V}}_1(\omega)$ и $\tilde{\mathcal{V}}_2(\omega)$ их сужения на интервалы $(b_1,\ b)$ и $(b,\ b_2)$ соответственно.

Аналогично тому, как задаче (2.1), (2.2) соответствует оператор–функция $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$: $W^2(b_1,\ b_2) \to W^0[b_1,\ b_2]$, задаче (2.10), (2.11) соответствует оператор–функция $\tilde{\mathcal{M}}(\lambda)$: $W^2(b_1,\ b) \oplus W^2(b,\ b_2) \to L_2(b_1,\ b_2) \times \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$, действующая по формуле

$$\tilde{\mathcal{M}}(\lambda)\tilde{\mathcal{V}} = \{\tilde{z} - \lambda^2\tilde{\mathcal{V}},\ \tilde{\mathcal{C}}_\sigma\tilde{\mathcal{V}},\ \tilde{\mathcal{T}}_1\tilde{\mathcal{V}},\ \tilde{\mathcal{T}}_2(\lambda)\tilde{\mathcal{V}}\}.$$

Здесь $\tilde{z}(\omega) = \dfrac{d^2\tilde{\mathcal{V}}_1(\omega)}{d\omega^2}$ при $\omega \in (b_1,\ b)$, $\tilde{z}(\omega) = \dfrac{d^2\tilde{\mathcal{V}}_2(\omega)}{d\omega^2}$ при $\omega \in (b,\ b_2)$; $\tilde{\mathcal{C}}_\sigma\tilde{\mathcal{V}} = \mathcal{V}_\sigma(\omega)|_{\omega=\omega_\sigma}$ $(\sigma = 1,\ 2)$; $\tilde{\mathcal{T}}_1\tilde{\mathcal{V}} = \tilde{\mathcal{V}}_2(\omega)|_{\omega=b} - \tilde{\mathcal{V}}_1(\omega)|_{\omega=b}$, $\tilde{\mathcal{T}}_2(\lambda)\tilde{\mathcal{V}} = \dfrac{d\tilde{\mathcal{V}}_2(\omega)}{d\omega}\Big|_{\omega=b} - \dfrac{d\tilde{\mathcal{V}}_1(\omega)}{d\omega}\Big|_{\omega=b} + \sum\limits_{k=1,2}(-1)^k\bar{e}_k e^{-i\lambda\ln\beta_k}\dfrac{d\tilde{\mathcal{V}}_k(\omega-\omega_k)}{d\omega}\Big|_{\omega=b}$.

В § 2.4 при помощи леммы 2.1 и формулы Грина получено следующее условие биортогональности и нормировки жордановых цепочек в терминах формулы Грина. Положим $\tilde{\mathcal{C}}'_\sigma\tilde{\mathcal{V}} = (-1)^{\sigma+1}\dfrac{d\tilde{\mathcal{V}}_\sigma(\omega)}{d\omega}\Big|_{\omega=b_\sigma}$.

Лемма 2.2. *Пусть собственному числу* λ_0 *оператор–функции* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ *отвечает каноническая система жордановых цепочек* $\{\varphi^{(0,j)},\ \ldots,\ \varphi^{(\varkappa_j-1,j)} : j = 1,\ \ldots,\ J\}$. *Тогда существует такая каноническая система жордановых цепочек* $\{\psi^{(0,j)},\ \ldots,\ \psi^{(\varkappa_j-1,j)} : j = 1,\ \ldots,\ J\}$ *оператор–функции* $\tilde{\mathcal{M}}(\lambda)$, *отвечающая числу* $\bar{\lambda}_0$, *что выполняются соотношения*

$$\sum_{p=0}^{\nu}\sum_{q=0}^{k}\frac{1}{(\nu+k+1-p-q)!}\Big\{(\partial_\lambda^{\nu+k+1-p-q}\tilde{\mathcal{P}}(\lambda_0)\varphi^{(q,\xi)},\ \psi^{(p,\zeta)})_{(b_1,\ b_2)}+$$
$$+\sum_\sigma(\partial_\lambda^{\nu+k+1-p-q}\tilde{\mathcal{B}}_\sigma(\lambda_0)\varphi^{(q,\xi)},\ \tilde{\mathcal{C}}'_\sigma\psi^{(p,\zeta)})_{\mathbb{C}}\Big\} = \delta_{\xi,\zeta}\delta_{\varkappa_\xi-k-1,\nu}. \tag{2.12}$$

Сформулируем основной результат о представлении коэффициентов $c_n^{(k,j)}$ в асимптотической формуле (2.3) в терминах формулы Грина (см. § 2.4). Положим $\mathcal{C}'_\sigma(D_y)\mathcal{V} = \dfrac{\partial\mathcal{V}_\sigma}{\partial n_\sigma}\Big|_{\gamma_\sigma}$.

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1; тогда коэффициенты* $c_n^{(k,j)}$ *из (2.3) вычисляются по формулам*

$$c_n^{(k,j)} = \Big(f,\ i\mathcal{V}_n^{(\varkappa_{j,n}-k-1,j)}\Big)_K + \sum_\sigma \Big(g_\sigma,\ i\mathcal{C}'_\sigma(D_y)\mathcal{V}_n^{(\varkappa_{j,n}-k-1,j)}\Big)_{\gamma_\sigma}, \qquad (2.13)$$

где $\mathcal{V}_n^{(\nu,j)} = r^{i\bar\lambda_n}\sum\limits_{q=0}^{\nu}\frac{1}{q!}(i\ln r)^q\psi_n^{(\nu-q,j)}$ *— степенное решение однородной задачи трансмиссии (2.10), (2.11), причем* $\{\psi_n^{(0,j)},\ \dots,\ \psi_n^{(\varkappa_{j,n}-1,j)} : j = 1,\ \dots,\ J_n\}$ *— каноническая система жордановых цепочек оператор-функции* $\tilde{\mathcal{M}}(\lambda)$*, отвечающая числу* $\bar\lambda_n$*, а цепочки* $\{\varphi_n^{(0,j)},\ \dots,\ \varphi_n^{(\varkappa_{j,n}-1,j)} : j = 1,\ \dots,\ J_n\}$ *(фигурирующие в (2.4)) и* $\{\psi_n^{(0,j)},\ \dots,\ \psi_n^{(\varkappa_{j,n}-1,j)} : j = 1,\ \dots,\ J_n\}$ *подчинены условиям (2.12) биортогональности и нормировки.*

4. В гл. 3 диссертации, при исследовании нелокальных эллиптических задач в ограниченных областях, решения рассматриваются не во всей области G, а в $G\setminus\mathcal{K}$, где $\mathcal{K}$ — конечное множество точек, лежащих как на границе области G, так и строго внутри G (см. сноски 14 и 16). При этом в окрестности множества $\mathcal{K}$ решения могут иметь степенные особенности, что соответствует определенным условиям согласования. Для исследования асимптотики решений таких задач наряду с уже сформулированными теоремами гл. 2 будут также использованы результаты § 2.5, где получена асимптотика решений эллиптического уравнения в $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, а также вычислены коэффициенты в асимптотике. Данные результаты здесь не приводятся, так как по форме они аналогичны результатам § 2.4.

Глава 3. Асимптотика решений нелокальных эллиптических задач в плоских ограниченных областях

1. В третьей главе диссертации рассматриваются нелокальные эллиптические задачи в плоских ограниченных областях. При помощи результатов гл. 2 получена асимптотика решений нелокальных задач и выведены явные формулы для коэффициентов в указанной асимптотике в терминах сопряженных нелокальных операторов. Установлена связь между индексами одной и той же нелокальной задачи, рассматриваемой в пространствах с разными показателями веса.

Для наглядности результаты гл. 3 будут изложены на следующем модельном примере. Пусть $G\in\mathbb{R}^2$ — ограниченная область с границей $\partial G = \bigcup\limits_{\sigma=1,2}\bar\Upsilon_\sigma$, где Υ_σ — открытые (в топологии ∂G) кривые класса C^∞, такие, что $\Upsilon_1\cap\Upsilon_2=\varnothing$, $\bar\Upsilon_1\cap\bar\Upsilon_2=\{g_1,\ h_1\}$. Будем предполагать, что в окрестности точек g_1 и h_1 область G совпадает с некоторым углом.

Пусть Ω_σ ($\sigma = 1,\ 2$) — бесконечно дифференцируемые невырожденные преобразования, отображающие некоторую окрестность $\mathcal{O}_\sigma$ многообразия Υ_σ на множество $\Omega_\sigma(\mathcal{O}_\sigma)$, так, что $\Omega_\sigma(\Upsilon_\sigma)\subset G$. Пусть для определенности $\Omega_1(g_1) = g_2 \in G$, $\Omega_2(g_1) = g_1$, $\Omega_1(h_1) = h_1 \in G$, $\Omega_2(h_1) = h_2 \in G$; $g_2 \neq h_2$ (см. рис. 3.1).

Предположим для простоты, что преобразования $\Omega_\sigma(y)$ линейны вблизи точек g_1 и h_1.

Введем множество $\mathcal{K} = \{g_1,\ h_1,\ g_2,\ h_2\}$. В § 3.1 рассматривается нелокальная задача вида

$$\Delta u = f(y)\quad (y\in G\setminus\mathcal{K}), \qquad (3.1)$$

$$\mathbf{B}_\sigma u \equiv u(y)|_{\Upsilon_\sigma} + u(\Omega_\sigma(y))|_{\Upsilon_\sigma} = f_\sigma(y)\quad (y\in\Upsilon_\sigma;\ \sigma = 1,\ 2)^{24}. \qquad (3.2)$$

Введем пространство $H_a^l(G)$ как пополнение множества $C_0^\infty(\bar G\setminus\mathcal{K})$ по норме $\|u\|_{H_a^l(G)} = \left(\sum\limits_{|\alpha|\le l}\int\limits_Q \rho^{2(a-l+|\alpha|)}|D^\alpha u|^2dy\right)^{1/2}$. Здесь $l\ge 0$ — целое; $a\in\mathbb{R}$; $\rho(y) = \operatorname{dist}(y,\ \mathcal{K})$. Если вместо

[24] В диссертации изучается эллиптическое уравнение порядка $2m$ с общими нелокальными условиями. При этом преобразования переменных отображают точки сопряжения нелокальных условий как на границу, так и внутрь области, образуя конечные орбиты.

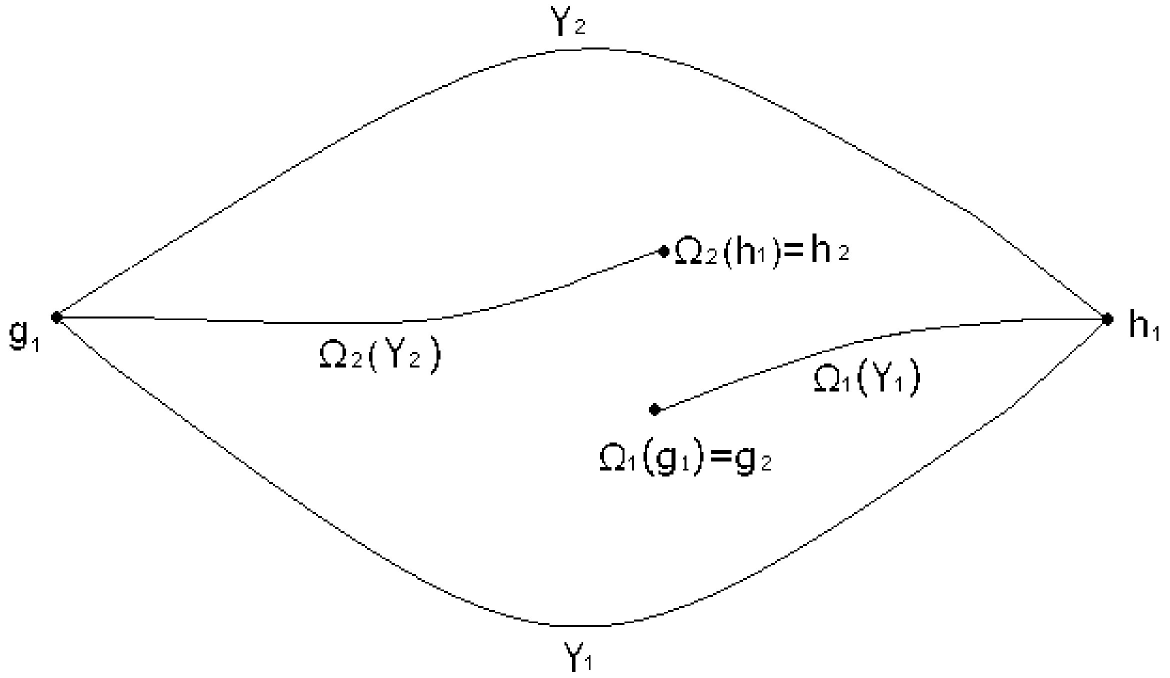

Рис. 3.1: Область G.

области G рассматривается угол с вершиной в точке $g \in \bar{G}$ или некоторая окрестность точки g, то в определении весового пространства полагаем $\mathcal{K} = \{g\}$.

Через $H_a^{l-1/2}(\Upsilon)$ обозначим пространство следов на гладкой кривой $\Upsilon \subset \bar{G}$ с нормой $\|\psi\|_{H_a^{l-1/2}(\Upsilon)} = \inf \|u\|_{H_a^l(G)} \quad (u \in H_a^l(G): \ u|_\Upsilon = \psi)$.

2. В § 3.2 выводится асимптотика решения $u \in H_a^2(G)$ задачи (3.1), (3.2) с правой частью $\{f, \ f_\sigma\} \in H_{a_1}^0(G, \ \Upsilon) = H_{a_1}^0(G) \times \prod\limits_\sigma H_{a_1}^{3/2}(\Upsilon_\sigma)$ при условии $0 < a - a_1 < 1$.

Отметим, что нарушение неравенства $a - a_1 < 1$ означает "слишком большую" регулярность правой части $\{f, \ f_\sigma\}$, и при этом точные результаты должны выделять больше членов асимптотики, чем в нашем случае. Это можно сделать, как и в работе А.Л. Скубачевского (см. сноску 14), составляя соответствующие уравнения для остатка в асимптотической формуле и последовательно применяя к ним полученные для случая $a - a_1 < 1$ результаты. В диссертации это не делается, так как подробные доказательства приводят к большому увеличению размеров работы, не внося существенно нового (по отношению к настоящей работе и работе А.Л. Скубачевского).

Вначале рассмотрим асимптотику решения задачи (3.1), (3.2) в окрестности $\mathcal{V}(g_2)$ точки g_2. Указанная асимптотика совпадает с асимптотикой решения уравнения

$$\Delta u = f(y) \quad (y \in \mathcal{V}(g_2)). \tag{3.3}$$

Следуя § 2.5, введем оператор функцию $\tilde{\mathcal{L}}_2(\lambda) = \dfrac{d^2}{d\omega^2} - \lambda^2 : W_{2\pi}^2(0, \ 2\pi) \to L_2(0, \ 2\pi)$, где $W_{2\pi}^2(0, \ 2\pi)$ есть замыкание множества 2π-периодических бесконечно дифференцируемых функций в $W^2(0, \ 2\pi)$.

Пусть на прямых $\operatorname{Im}\lambda = a_1 - 1$ и $\operatorname{Im}\lambda = a - 1$ нет собственных чисел оператор–функции $\tilde{\mathcal{L}}_2(\lambda)$, а в полосе $a_1 - 1 < \operatorname{Im}\lambda < a - 1$ лежит единственное собственное число λ_2. Пусть собственному числу λ_2 соответствует единственный собственный вектор $\varphi_2(\omega)$, а присоединенных векторов не существует[25]. Тогда, согласно результатам § 3.2, имеет место следующее асимптотическое

[25]В диссертации изучен общий случай, когда в соответствующей полосе имеется конечное число собственных значений, а каждому соб-

представление решения $u \in H_a^2(G)$ вблизи g_2:

$$u(y) = c_2 u_2(y) + \hat{u}(y) \quad (y \in \mathcal{V}(g_2)). \tag{3.4}$$

Здесь c_2 — некоторая константа, $u_2 = r^{i\lambda_2}\varphi_2(\omega)$ — решение однородного уравнения (3.3); $(\omega,\ r)$ — полярные координаты с полюсом в точке g_2 и полярной осью, направленной для определенности по касательной к кривой $\Omega_1(\Upsilon_1)$; $\hat{u} \in H_{a_1}^2(\mathcal{V}(g_2))$.

Теперь рассмотрим асимптотику решения задачи (3.1), (3.2) в окрестности $\mathcal{V}(g_1)$ точки g_1. Пусть вблизи точки g_1 преобразование $\Omega_2(y)$ есть поворот на угол ω_2 и растяжение в β_2 раз относительно точки g_1, а преобразование $\Omega_1(y)$ есть поворот и сдвиг на некоторый вектор (для простоты предполагаем, что растяжение отсутствует). Легко видеть, что асимптотика решения задачи (3.1), (3.2) при $y \in \mathcal{V}(g_1)$ совпадает с асимптотикой решения задачи

$$\Delta u = f(y) \quad (y \in \mathcal{V}(g_1) \cap G), \tag{3.5}$$

$$\begin{gathered} u|_{\mathcal{V}(g_1)\cap\Upsilon_1} = \hat{f}_1 - c_2 f_{12}\ (y \in \mathcal{V}(g_1) \cap \Upsilon_1), \\ u|_{\mathcal{V}(g_1)\cap\Upsilon_2} + e_2 u(\mathcal{G}_2 y)|_{\mathcal{V}(g_1)\cap\Upsilon_2} = f_2\ (y \in \mathcal{V}(g_1) \cap \Upsilon_2). \end{gathered} \tag{3.6}$$

Здесь $\hat{f}_1 = f_1 - e_1\hat{u}(\Omega_1(y))|_{\mathcal{V}(g_1)\cap\Upsilon_1} \in H_{a_1}^{3/2}(\mathcal{V}(g_1) \cap \Upsilon_1)$, $f_{12} = e_1 u_2(\Omega_1(y))|_{\mathcal{V}(g_1)\cap\Upsilon_1} = e_1 r^{i\lambda_2}\varphi_2(0)$[26]; $\mathcal{G}_2$ — оператор поворота на угол ω_2 и растяжения в β_2 раз относительно точки g_1.

Совместим начало координат с точкой g_1. Пусть вблизи g_1 область G есть угол $K = \{y \in \mathbb{R}^2 :\ r > 0,\ b_1 < \omega < b_2\}$ со сторонами $\gamma_\sigma = \{y \in \mathbb{R}^2 :\ r > 0,\ \omega = b_\sigma\}$, где $-\pi < b_1 < b_2 < \pi$. Тогда задаче (3.5), (3.6) соответствует оператор–функция $\tilde{\mathcal{L}}_1(\lambda) : W^2(b_1,\ b_2) \to W^0[b_1,\ b_2]$, действующая по формуле (1.5), в которой следует положить $e_1 = 0$.

Пусть на прямых $\operatorname{Im}\lambda = a_1 - 1$ и $\operatorname{Im}\lambda = a - 1$ нет собственных чисел оператор–функции $\tilde{\mathcal{L}}_1(\lambda)$, а в полосе $a_1 - 1 < \operatorname{Im}\lambda < a - 1$ лежит единственное собственное число λ_1. Пусть собственному числу λ_1 соответствует единственный собственный вектор $\varphi_1(\omega)$, а присоединенных векторов не существует[27]. Тогда, согласно результатам § 3.2, имеет место следующее асимптотическое представление решения $u \in H_a^2(G)$ вблизи g_1:

$$u(y) = c_1 u_1(y) + c_2 u_{12}(y) + \hat{u}(y) \quad (y \in \mathcal{V}(g_1)). \tag{3.7}$$

Здесь c_1 — некоторая константа, c_2 — константа из формулы (3.7); $u_{12} = r^{i\lambda_2}\varphi_{12}(\omega)$ ($\varphi_{12} \in W^2(b_1,\ b_2)$) — частное решение следующей задачи со специальной правой частью:

$$\Delta u = 0 \quad (y \in K), \tag{3.8}$$

$$u|_{\gamma_1} = -f_{12}, \quad u|_{\gamma_2} + e_2 u(\mathcal{G}_2 y)|_{\gamma_2} = 0 \tag{3.9}$$

(существование частного решения такого вида доказано в § 2.4 гл. 2 диссертации); $u_1 = r^{i\lambda_1}\varphi_1(\omega)$ — решение однородной задачи (3.8), (3.9); $(\omega,\ r)$ — полярные координаты с полюсом в точке $g_1 = 0$; $\hat{u} \in H_{a_1}^2(\mathcal{V}(g_1))$.

Аналогичным образом исследуется асимптотика решения вблизи точек h_2 и h_1. Пусть $\tilde{\mathcal{L}}_2'(\lambda)$, $\tilde{\mathcal{L}}_1'(\lambda)$ оператор–функции, соответствующие точкам h_2, h_1 и действующие в тех же пространствах, что и $\tilde{\mathcal{L}}_2(\lambda)$, $\tilde{\mathcal{L}}_1(\lambda)$. Всюду в дальнейшем для простоты считаем выполненным следующее

Условие 3.1. *Пусть на прямых* $\operatorname{Im}\lambda = a_1 - 1$ *и* $\operatorname{Im}\lambda = a - 1$ *нет собственных чисел оператор–функций* $\tilde{\mathcal{L}}_\nu(\lambda)$, $\tilde{\mathcal{L}}_\nu'(\lambda)$, $\nu = 1,\ 2$, *а в полосе* $a_1 - 1 < \operatorname{Im}\lambda < a - 1$ *лежит единственное собственное число* λ_ν *оператор–функции* $\tilde{\mathcal{L}}_\nu(\lambda)$ *и нет собственных чисел оператор–функций* $\tilde{\mathcal{L}}_\nu'(\lambda)$. *Пусть собственному числу* λ_ν *соответствует единственный собственный вектор* $\varphi_\nu(\omega)$, $\nu = 1,\ 2$, *а присоединенных векторов не существует.*

ственному вектору соответствует цепочка присоединенных.

[26]Тот факт, что $\varphi_2(\omega)$ вычисляется при $\omega = 0$, связан с соответствующим выбором полярной системы координат (см. выше).

[27]См. сноску 25.

Для формулировки теоремы об асимптотике решения $u \in H_a^2(G)$ нелокальной задачи (3.1), (3.2) во всей области G введем бесконечно гладкие функции η_ν с носителями в $\mathcal{V}(g_\nu)$, равные единице в некоторых окрестностях g_ν, $\nu = 1,\ 2$. Рассмотрим функции

$$U_1 = \eta_1 u_1, \quad U_2 = \eta_2 u_2 + \eta_1 u_{12}.$$

Каждую из функций U_ν распространим на всю область G, считая равной нулю вне носителя η_ν, $\nu = 1,\ 2$. Тогда из соотношений (3.4) и (3.7) получим следующий результат.

Теорема 3.1. *Пусть* $u \in H_a^2(G)$ *— решение задачи (3.1), (3.2) с правой частью* $\{f,\ f_\sigma\} \in H_{a_1}^0(G,\ \Upsilon)$, $0 < a - a_1 < 1$. *Тогда*

$$u \equiv \Big(c_1 U_1 + c_2 U_2\Big) \ \Big(\operatorname{mod} H_{a_1}^2(G)\Big), \tag{3.10}$$

где $c_1,\ c_2$ *— некоторые константы.*

3. Асимптотика (3.10) решения нелокальной задачи, полученная в § 3.2, позволяет установить связь между индексами операторов одной и той же нелокальной задачи (3.1), (3.2), но действующими в пространствах с разными показателями веса. Это сделано в § 3.3.

Рассмотрим операторы

$$\mathbf{L}_a = \{\Delta,\ \mathbf{B}_\sigma\} : H_a^2(G) \to H_a^0(G,\ \Upsilon), \quad \mathbf{L}_{a_1} = \{\Delta,\ \mathbf{B}_\sigma\} : H_{a_1}^2(G) \to H_{a_1}^0(G,\ \Upsilon).$$

Теорема 3.2. *Справедлива формула:* $\operatorname{ind} \mathbf{L}_a = \operatorname{ind} \mathbf{L}_{a_1} + \varkappa$, *где* $\varkappa$ *— сумма полных кратностей собственных чисел* $\lambda_1,\ \lambda_2$ *(в нашем случае* $\varkappa = 2$*).*

4. В § 3.4 получена асимптотика решений сопряженной нелокальной задачи в окрестности точек множества $\mathcal{K}$. Данные результаты используются далее для вычисления коэффициентов c_ν в формуле (3.10).

Рассмотрим оператор $\mathbf{L}^* : H_{a_1}^0(G,\ \Upsilon)^* \to H_{a_1}^2(G)^*$, сопряженный с оператором $\mathbf{L} = \{\Delta,\ \mathbf{B}_\sigma\} : H_{a_1}^2(G) \to H_{a_1}^0(G,\ \Upsilon)$. Оператор $\mathbf{L}^*$ действует на элемент $\{v,\ w_\sigma\} \in H_{a_1}^0(G,\ \Upsilon)^*$ для всех $u \in H_{a_1}^2(G)$ по формуле

$$< u,\ \mathbf{L}^*\{v,\ w_\sigma\} >= (\Delta u,\ v)_G + \sum_\sigma < \mathbf{B}_\sigma u,\ w_\sigma >_{\Upsilon_\sigma}.$$

Здесь $(\cdot,\ \cdot)_G$ есть скалярное произведения в $L_2(G)$; $< \cdot,\ \cdot >_{\Upsilon_\sigma}$ обозначает полуторалинейную форму на паре $H_a^{3/2}(\Upsilon_\sigma)$, $H_a^{3/2}(\Upsilon_\sigma)^*$.

Будем изучать асимптотику решения задачи

$$\mathbf{L}^*\{v,\ w_\sigma\} = \Psi, \tag{3.11}$$

полагая, что $\{v,\ w_\sigma\} \in H_{a_1}^0(G,\ \Upsilon)^*$, а $\Psi \in H_a^2(G)^*$.

В §§ 2.3 и 2.5 показано, что $\bar\lambda_\nu$ есть собственное число оператора $\tilde{\mathcal{L}}_\nu^*(\lambda)$, сопряженного с оператором $\tilde{\mathcal{L}}_\nu(\bar\lambda)$. Обозначим через $\{\psi_1,\ \chi_{1,\sigma}\} \in W^0[b_1,\ b_2]^*$ ($\psi_2 \in L_2(0,\ 2\pi)$) соответствующий $\bar\lambda_1$ ($\bar\lambda_2$) собственный вектор оператор–функции $\tilde{\mathcal{L}}_1^*(\lambda)$ ($\tilde{\mathcal{L}}_2^*(\lambda)$), удовлетворяющий условию биортогональности и нормировки, которое в нашем случае принимает вид

$$< -2\lambda_\nu \varphi_\nu,\ \psi_\nu >= 1^{28}. \tag{3.12}$$

Здесь, как и ранее, $< \cdot,\ \cdot >$ — обозначает полуторалинейную форму на соответствующей паре сопряженных пространств.

Положим

$$\{v_1,\ w_{1,\sigma}\} = \{r^{i\bar\lambda_1}\psi_1,\ r^{i\bar\lambda_1 - 1}\chi_{1,\sigma}\} \quad (v_2 = r^{i\bar\lambda_2}\psi_2), \tag{3.13}$$

[28] Можно показать, что $\lambda_\nu \neq 0$ при выполнении условия 3.1, поэтому найдутся векторы $\{\psi_1,\ \chi_{1,\sigma}\}$ и ψ_2 удовлетворяющие (3.12).

где $(\omega,\ r)$ — полярные координаты с полюсом в точке g_1 (с полюсом в точке g_2 и полярной осью, направленной, как и ранее, по касательной к кривой $\Omega_1(\Upsilon_1)$). В § 3.4 показано, что векторы (3.13) удовлетворяют соответствующей однородной сопряженной задаче в угле (в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$). Там же выводится асимптотика решения задачи (3.11) в окрестности g_1:

$$\eta_1\{v,\ w_\sigma\} \equiv d_1\eta_1\{v_1,\ w_{1,\sigma}\} \ \Big(\operatorname{mod} H_a^0(G,\ \Upsilon)^*\Big), \tag{3.14}$$

где d_1 — некоторая константа, и асимптотика решения задачи (3.11) в окрестности g_2:

$$\eta_2 v \equiv \Big(d_2\eta_2 v_2 + d_1\eta_2 v_{21}\Big) \ \Big(\operatorname{mod} H_a^0(G)^*\Big). \tag{3.15}$$

Здесь d_2 — некоторая константа, d_1 — константа из соотношения (3.14); $v_{21} = r^{i\bar{\lambda}_1}\psi_{21}$; $(\omega,\ r)$ — полярные координаты с полюсом в точке g_2 и полярной осью, направленной по касательной к кривой $\Omega_1(\Upsilon_1)$; $\psi_{21} \in W_{2\pi}^2(0,\ 2\pi)^*$. Распределение v_{21} есть частное решение следующего сопряженного уравнения в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ со специальной правой частью:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \Delta u \cdot \bar{v}\, dy = \int\limits_0^\infty u(0,\ r) \cdot \overline{(-\bar{e}_1\chi_{1,1} r^{i\bar{\lambda}_1 - 1})}dr^{29} \quad \text{для всех } u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}),$$

где $u(\omega,\ r)$ есть функция $u(y)$, записанная в полярных координатах (существование частного решения такого вида доказано в § 2.5).

Положим

$$\{V_2,\ W_{2,\sigma}\} = \eta_2\{v_2,\ 0\}, \quad \{V_1,\ W_{1,\sigma}\} = \eta_1\{v_1,\ w_{1,\sigma}\} + \eta_2\{v_{21},\ 0\}.$$

Тогда из соотношений (3.14) и (3.15) получим следующий результат.

Теорема 3.3. *Пусть $\{v,\ w_\sigma\} \in H_{a_1}^0(G,\ \Upsilon)^*$ — решение задачи (3.11) с правой частью $\Psi \in H_a^2(G)^*$. Тогда*

$$\{v,\ w_\sigma\} \equiv \Big(d_1\{V_1,\ W_{1,\sigma}\} + d_2\{V_2,\ W_{2,\sigma}\}\Big) \ \Big(\operatorname{mod} H_a^2(G,\ \Upsilon)^*\Big), \tag{3.16}$$

где $d_1,\ d_2$ — некоторые константы.

5. В § 3.5 получены формулы для коэффициентов c_ν из асимптотического представления (3.10). Вначале при помощи теоремы 2.2 и аналогичной теоремы для задачи в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ (см. § 2.5) выводятся следующие формулы:

$$c_2 = (\Delta(\eta_2 u),\ iv_2)_{\mathbb{R}^2},$$

$$c_1 = < \{\Delta u',\ u'|_{\gamma_1},\ u'|_{\gamma_2} + e_2 u'(\mathcal{G}_2 y)|_{\gamma_2}\},\ i\{v_1,\ w_{1,\sigma}\} >$$

где $u' = \eta_1(u - c_2 u_{12})$. Таким образом, видно, что значение коэффициента c_1, так же, как и общий вид асимптотики, зависит не только от данных задачи вблизи точки g_1, но и от данных вблизи точки g_2, лежащей внутри области, и связанной с g_1 посредством преобразования переменных: $\Omega_1(g_1) = g_2$.

Аналогичным образом, используя результаты § 2.4 и 2.5, можно написать формулы для коэффициентов c_ν в терминах формул Грина для соответствующих модельных задач в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ и в угле K. Однако во всех этих формулах, как легко видеть, коэффициенты зависят от решения u. Далее выводятся формулы, согласно которым c_ν суть функционалы на векторах правых частей нелокальной задачи (3.1), (3.2). Эти функционалы зависят от данных задачи уже во всей области G, а не только в окрестности точек множества $\mathcal{K}$.

[29] Тот факт, что $u(\omega,\ r)$ вычисляется при $\omega = 0$, связан с соответствующим выбором полярной системы координат (см. выше).

Прежде, чем формулировать основную теорему, сделаем следующее допущение. Из теоремы 3.1 следует, что однородная задача (3.1), (3.2) имеет $d \leq 2$ решений из пространства $H_a^2(G)$, линейно независимых по модулю пространства $H_{a_1}^2(G)$. В диссертации предполагается выполненным следующее

Условие 3.2. *Пусть* $d = 0$.

Условие 3.2 означает, что любое решение однородной задачи (3.1), (3.2) из пространства $H_a^2(G)$ принадлежит пространству $H_{a_1}^2(G)$. В этом случае показано, что при заданной правой части из пространства $H_{a_1}^0(G,\ \Upsilon)$ коэффициенты в асимптотической формуле (3.10) для решения определяются однозначно. Если же $d > 0$, то, как и в случае "локальной" задачи (см. теорему 3.6 гл. 4[30]), существует определенная свобода в выборе коэффициентов асимптотики. При этом процедура их вычисления значительно усложняется технически (хотя идейно остается аналогичной приведенной в диссертации для случая $d = 0$).

Итак, пусть $d = 0$. Тогда, в силу результатов § 3.3, существуют решения $\{\varphi_t,\ \psi_{t,\sigma}\} \in H_{a_1}^0(G,\ \Upsilon)^*$ однородного уравнения (3.11), удовлетворяющие сравнениям

$$\{\varphi_t,\ \psi_{t,\sigma}\} \equiv \{V_t,\ W_{t,\sigma}\} \left(\operatorname{mod} H_a^0(G,\ \Upsilon)^*\right),\ t = 1,\ 2.$$

Введем функции $\eta_{\nu,\varepsilon} = \eta_\nu(\omega,\ r/\varepsilon)$, где $\eta_\nu(\omega,\ r)$ есть функция $\eta_\nu(y)$, записанная в полярных координатах с полюсом в точке g_ν, $\nu = 1,\ 2$. Имеет место следующий основной результат гл. 3.

Теорема 3.4. *Предположим, что выполнены условия 3.1 и 3.2. Пусть $u \in H_a^2(G)$ — решение задачи (3.1), (3.2) с правой частью $\{f,\ f_\sigma\} \in H_{a_1}^0(G,\ \Upsilon)$. Тогда функция $u \in H_a^2(G)$ удовлетворяет сравнению (3.10). Константы c_ν ($\nu = 1,\ 2$) определяются по формулам*

$$c_2 = <\{f,\ f_\sigma\},\ i\{\varphi_1,\ \psi_{1,\sigma}\}>,$$

$$c_1 = <\{f,\ f_\sigma\},\ i\{\varphi_1,\ \psi_{1,\sigma}\} - iC\{\varphi_2,\ \psi_{2,\sigma}\}> .$$

Здесь

$$\begin{aligned} C = \lim_{\varepsilon\to 0} &< \Delta(\eta_{2,\varepsilon}u_2),\ iv_{21} > + \\ &+ < \{\Delta(\eta_{1,\varepsilon}u_{12}),\ \eta_{1,\varepsilon}u_{12}|_{\gamma_1} + \eta_{1,\varepsilon}f_{12}|_{\gamma_1},\ \eta_{1,\varepsilon}u_{12}|_{\gamma_2} + e_2(\eta_{1,\varepsilon}u_{12})(\mathcal{G}_2 y)|_{\gamma_2}\},\ i\{v_1,\ w_{1,\sigma}\} >, \end{aligned} \quad (3.17)$$

причем указанный предел существует.

Замечание 3.1. Функция u_2 (u_{12}) есть решение однородного уравнения (3.3) (решение задачи (3.8), (3.9) со специальной правой частью $\{0,\ -f_{12},\ 0\}$). Поэтому функция, на которую действует распределение iv_{21} ($i\{v_1,\ w_{1,\sigma}\}$) равна нулю вблизи точки g_2 ($g_1 = 0$). Используя данный факт, нетрудно убедиться, что под знаком предела в формуле (3.17) стоит выражение вида $\mathrm{const} \cdot \varepsilon^{i(\lambda_2 - \lambda_1)}$. Отсюда и из существования предела в (3.17) следует, в частности, что $C = 0$, если $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Таким образом, теорема 3.4 показывает, что значения коэффициентов c_ν суть функционалы на векторах $\{f,\ f_\sigma\}$ — правых частях нелокальной задачи (3.1), (3.2). Эти функционалы зависят от данных задачи во всей области G, а не только в окрестности точек множества $\mathcal{K}$.

Апробация

Результаты диссертационной работы докладывались на семинаре в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН под руководством академика РАН С.М. Никольского и чл.-корр. РАН Л.Д. Кудрявцева; на семинаре кафедры общей математики факультета ВМиК МГУ под руководством чл.-корр. РАН Е.И. Моисеева; на семинарах механико–математического факультета

[30] Назаров С.А., Пламеневский Б.А. Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. М.: Наука, 1991.

МГУ: под руководством М.С. Аграновича и М.И. Вишика, под руководством В.А. Кондратьева и под руководством А.А. Шкаликова; на семинаре в Московском авиационном институте под руководством Г.А. Каменского и А.Л. Скубачевского.

Результаты диссертационной работы докладывались также на международных конференциях: “Differential Equations and Related Topics”, посвященной 100-летию И.Г.Петровского, МГУ, Москва, 2001; “Differential and Functional Differential Equations”, Москва, 2002; “Functional Differential Equations and Applications”, университет им. Бен Гуриона, Беер Шева, Израиль, 2002; Крымских осенних математических школах–симпозиумах, Симферополь, 2000, 2001.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в работах, библиографическое описание которых дается ниже.

Литература

1. Гуревич П.Л. Нелокальные эллиптические задачи в двугранных углах и формула Грина // Докл. АН. 2001. Т. 379, №6. С. 735–738.

2. Гуревич П.Л. Разрешимость нелокальных эллиптических задач в двугранных углах // Мат. заметки. 2002. Т. 72, вып. 2. С. 178–197.

3. Gurevich P.L. Nonlocal problems for elliptic equations in dihedral angles and the Green formula // Mitteilungen aus dem Mathem. Seminar Giessen, Math. Inst. Univ. Giessen, Germany. 2001. Heft 247. P. 1–74.

4. Gurevich P.L. On the Green formula for nonlocal elliptic problems // Abstracts of International Conf. “Differential Equations and Related Topics” dedicated to the Centenary Anniversary of I.G. Petrovskii, Moscow, MSU. 2001. P. 159–160.

5. Gurevich P.L. Nonlocal elliptic problems in Sobolev spaces // Abstracts of International Conference on Differential and Functional Differential Equations, Moscow, 2002. P. 41–42.

6. Gurevich P.L. Asymptotics and smoothness of generalized solutions for nonlocal elliptic problems // Abstracts of International Conference “Functional Differential Equations and Applications”. Beer Sheva, Israel, Ben Gurion Univ. of the Negev. 2002. P. 25–26.

7. Gurevich P.L. On the Fredholm solvability for some nonlocal problems // Proceedings of the 11th Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. Simferopol. 2001. V. 11. P. 201–203.

8. Gurevich P.L. On the index formula for some nonlocal elliptic boundary value problems // Proceedings of the 12th Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. Simferopol. 2002. V. 12. P. 158–160.