Freie Universität Berlin
Zuse Institut Berlin (ZIB)
Prof. Dr. H. Siebert, Dr. T. Dierkes, M. Berg

9. Übungsblatt zur Vorlesung
Höhere Analysis
Sommersemester 2013

Abgabe: 18.06.2013 in der Vorlesung

Die Aufgaben sollen in Dreiergruppen abgegeben werden. Auf jedem Übungszettel müssen die Namen **aller** *Gruppenmitglieder sowie der Tutoriumstermin stehen. Bitte tackern Sie Ihre Lösungen zusammen.*

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ eine reell (total) differenzierbare Funktion, so dass $\phi \circ f$ konstant ist und $D\phi(f(z)) \neq 0$ für alle $z \in G$ gilt.
Zeigen Sie, dass f konstant ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Gegeben seien $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \exp(it)$ und eine stetige Funktion $f : sp(\gamma) \to \mathbb{R}$.
Zeigen Sie, dass die Abschätzung

$$|\int_\gamma f(z)\, dz| \leq 4 \max\{|f(z)| \mid z \in sp(\gamma)\}$$

gilt.
Hinweis: Nutzen Sie Polarkoordinaten um $|\int_0^{2\pi} f(\exp(it)) \exp(it)\, dt|$ zu beschreiben und die Eulersche Formel.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Definiere $\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_1(t) = exp(it)$ für alle $t \in [0, 2\pi]$, und $\gamma_2 : [0, \pi + 2] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2(t) = \exp(it)$ für $t \in [0, \pi]$ und $\gamma_2(t) = t - \pi - 1$ für $t \in]\pi, \pi + 2]$.
Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_{\gamma 2|_{[0,\pi]}} z^2 + 3z\, dz, \qquad \int_{\gamma_j} z^2 + 3z\, dz \quad \text{und} \quad \int_{\gamma_j} |z| dz$$

für $j \in \{1, 2\}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei G ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, so dass für alle geschlossenen Kurven γ, deren Spur in G liegt, $\int_\gamma f(z) dz = 0$ gilt.
Sei $z_0 \in G$. Für alle $z \in G$ sei γ_z ein Polygonzug in G von z_0 nach z. (Mit ein bisschen Topologie kann man schnell beweisen, dass es einen solchen Polygonzug immer geben

muss. Sie dürfen es hier ohne Beweis verwenden.)
Zeigen Sie, dass die Funktion $F : G \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \int_{\gamma_z} f(\zeta)\, d\zeta$ wohldefiniert und Stammfunktion von f ist.
Sie haben dann gezeigt, dass f unter den obigen Voraussetzungen an f immer eine Stammfunktion besitzt. Gilt die Aussage auch, falls G nicht zusammenhängend ist? Begründen Sie Ihre Antwort.