Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. K. Polthier, H.-S. Lipschütz

SoSe 19

Status: 30. April 2019

Analysis I – Hausaufgabe 3

Abgabe: 7. Mai 2019, bis 10:15 im Hörsaal

---

1. Aufgabe (4 Punkte)

Gegeben seien die folgenden drei Aussagen. Zeigen Sie unter Verwendung der Axiome für jede Aussage entweder deren Richtigkeit oder geben Sie ein konkretes Gegenbeispiel (mit Begründung) an, wenn die Aussage im allgemeinen falsch ist. Seien $a, b, x \in \mathbb{R}$:

1.) $|x - a| < b \Rightarrow x > a - 2b$,

2.) $ab > 1$ und $a < 1 \Rightarrow b > 1$,

3.) $x(x - 2a^2) > 0 \Leftrightarrow |x - a^2| > a^2$.

2. Aufgabe (2 Punkte)

Untersuchen Sie die nachfolgenden Folgen auf Konvergenz. Bestimmen Sie im Konvergenzfall den Grenzwert. Sei $n \in \mathbb{N}$.

1.) Für gegebene $b_i \geq 0$ $(i = 1, \dots, m)$ und gegebenes $m \in \mathbb{N}$ sei $a_n := \sqrt[n]{b_1^n + \ldots + b_m^n}$,

2.) $b_n := (-1)^n \frac{1}{n}$.

3. Aufgabe (3 Punkte)

Untersuchen Sie die nachfolgenden Folgen auf Konvergenz. Geben Sie im Konvergenzfall $N(\epsilon)$ an. Sei $n \in \mathbb{N}$.

1.) $a_n := \frac{n^2+n+1}{n^2+5n+3}$,

2.) $b_n := (-1)^n \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

4. Aufgabe (4 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Gegeben sei die folgende rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$:

$$a_0 := a,\ a_1 := b,\ a_n := \frac{1}{3}(2a_{n-1} + a_{n-2}) \text{ für } n \geq 2.$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

5. Aufgabe (3 Punkte)

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ drei reelle Zahlenfolgen mit $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = a$ und $a_n \leq c_n \leq b_n$. Zeigen Sie, dass dann auch $\lim_{n \to \infty} c_n = a$ gilt.

Total: 16