Freie Universität Berlin SoSe 19
Institut für Mathematik
Prof. Dr. K. Polthier, H.-S. Lipschütz Status: 1. Juli 2019

Analysis I – Hausaufgabe 12

Abgabe: *10.* Juli 2019, bis 10:15 *vor dem* Hörsaal

---

1. Aufgabe (3 Punkte)
Konstruieren Sie ein Beispiel, das zeigt, dass die Voraussetzung $\varphi(x) \geq 0$ im Mittelwertsatz der Integralrechnung notwendig ist. Zeigen Sie explizit, dass Ihr Beispiel das Geforderte leistet.

2. Aufgabe (5 Punkte)
Gegeben sei die folgende Abbildung $T : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ für } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1] \text{ oder } x = 0, \\ \frac{1}{n} \text{ für } x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q},\ m, n \text{ teilerfremd.} \end{cases}$$

Untersuchen Sie, ob T Riemann-integrierbar ist. Falls T Riemann-integrierbar ist, bestimmen Sie $\int_0^1 T(x)\,dx$.

Zusatzaufgabe (4 Zusatzpunkte)
Sei $a > 1$. Zeigen Sie mittels Riemann'scher Summen, dass $\int_1^a \frac{1}{x}\,dx = \log(a)$.

Zusatzaufgabe (4 Zusatzpunkte)
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Weiter gebe es $\delta > 0$, sodass $f(x) \geq \delta$ für alle $x \in [a,b]$. Zeigen Sie, dass dann auch $\frac{1}{f}$ Riemann-integrierbar ist.

Total: 8