Freie Universität Berlin SoSe 19
Institut für Mathematik
Prof. Dr. K. Polthier, H.-S. Lipschütz Status: 20. Juni 2019

Analysis I – Hausaufgabe 10

Abgabe: 25. Juni 2019, bis 10:15 im Hörsaal

---

1. Aufgabe (4 Punkte)
Bestimmen Sie die Ableitungen der Funktionen $f_i : V_i \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, \ldots, 4\}$, auf ihrem Definitionsgebiet:

1.) $f_1(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1+x}}}$,

2.) $f_2(x) = x^{(x^{(x^x)})}$,

3.) $f_3(x) = \frac{(1+x)e^x}{2+x^2}$,

4.) $f_4(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$.

2. Aufgabe (3 Punkte)
Gegeben sei die Funktion $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. Bestimmen Sie eine Formel für die n-te Ableitung $f^{(n)}$ von f und beweisen die Gültigkeit dieser Formel.

3. Aufgabe (3 Punkte)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $f_i : I \to \mathbb{R}$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$ in I differenzierbar und $f_i(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Zeigen Sie, dass dann gilt[I]:

$$\frac{(f_1 \cdot \ldots \cdot f_n)'}{f_1 \cdot \ldots \cdot f_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i'}{f_i}.$$

4. Aufgabe (6 Punkte)
Zeigen Sie folgenden Behauptungen:

1.) Sei $f : V \to \mathbb{R}$ stetig in V. Weiterhin gebe es Konstanten $C > 0$, $\alpha > 1$, sodass für alle $x, y \in V$ $|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha$. Zeigen Sie, dass f auf V konstant ist.

2.) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar. Weiter sei $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in]a, b[$. Dann existiert $\xi \in]a, b[$ mit $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

3.) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gelte $f(a) \geq f(x)$ für alle $x > a$. Zeigen Sie, dass $f'(a) \leq 0$ ist.

Total: 16

[I] Eine Abbildung, die $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I ein Intervall, differenzierbar auf I und $f(x) \neq 0$ für alle $x \in I$, auf $\frac{f'}{f}$ abbildet, bezeichnet man als *logarithmische Ableitung*.