

Analysis I – Hausaufgabe 8

Abgabe: 11. Juni 2019, bis 10:15 im Hörsaal

1. Aufgabe (4 Punkte)

Zeigen Sie die folgenden Behauptungen:

- 1.) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ stetig. Dann gibt es mindestens ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = x$.
- 2.) Nutzen Sie den ersten Teil der Aufgabe, um zu zeigen, dass es genau eine Lösung der Gleichung $x^3 - 6 = x$ in \mathbb{R} gibt.

2. Aufgabe (6 Punkte)

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

- 1.) Seien $f, g : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zwei gleichmäßig stetige Funktionen. Dann ist ihr Produkt $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$ gleichmäßig stetig.
- 2.) Ist $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig, dann existiert $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- 3.) Ist $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und existiert $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, so ist f gleichmäßig stetig auf $[0, \infty)$.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf den angegebenen Definitionsbereichen auf gleichmäßige Stetigkeit:

- 1.) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$,
- 2.) $g : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Hinweis: Sie dürfen die Additionstheoreme für die trigonometrischen Funktionen benutzen.

4. Aufgabe (2 Punkte)

Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Hölder-stetig auf D* , wenn es eine Konstante $L \in \mathbb{R}$ und $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, sodass

$$|f(x) - f(x')| \leq L|x - x'|^\alpha \text{ für alle } x, x' \in D.$$

Zeigen Sie, dass jede Hölder-stetige Funktion gleichmäßig stetig ist.

Bitte wenden.

Total: 16

Analysis reloaded – Workshops von Studierenden für Studierende

In Kooperation mit der AG Didaktik der Mathematik werden vertiefende Workshops zu zentralen Begriffen der Analysis angeboten. Diese wurden von Masterstudierenden entwickelt und richten sich als zusätzliches Angebot an die Studierenden der Analysis I.

Sie sind herzlich eingeladen, Ihr Wissen zu vertiefen, sich mit anderen Studierenden auszutauschen und dabei neue Erkenntnisse zu gewinnen.

Zeit: Samstag, 15.06., 11–16 Uhr

Ort: Arnimallee 3, in einer ε -Umgebung um Raum 019

Die drei Workshops werden parallel angeboten und dauern zwei Stunden, Beginn ist jeweils um 11:15 Uhr und 13:45 Uhr. Eine Anmeldung ist nicht erforderlich.

Hinweis: Die nächsten Workshops zu drei weiteren Themen finden am 29.06. statt.

Workshop „Folgen und Grenzwerte“

Folgen kann jeder? Du denkst: Auf Facebook ja, aber mathematisch nein? Dann sei nicht beschränkt und lass dein Wissen über Folgen und Grenzwerte in diesem Workshop bestimmt gegen unendlich divergieren.

Workshop „Kolosseum der Stetigkeit“

Du willst dich im Kolosseum beweisen? Lächerlich! Um Einsdurchixios und Sprungstellus im Kampf zu stellen benötigst du weit mehr als deinen Bleistift und dein Bauchgefühl. Hier erhältst du das Wissen und die Technik, um stetigen Fußes solche Ungeheuer herunterzubrechen und zu bewältigen. Härte deinen Schild des Grundwissens, schärfe dein Schwert der Beweistechnik und stelle dich dieser Herausforderung!

Workshop „Einsames Epsilon sucht x-loses Delta“

„Ich habe es lange genug mit Tinder und Co probiert, aber für ein Epsilon wie mich war nie ein passendes Delta dabei. Ich bin sicher nichts Besonderes, aber auch keine Null! Leider waren alle Kontakte bisher eher unstetig.“ ($\varepsilon, \varphi, >0$)