

Analysis I – Hausaufgabe 6

Abgabe: 28. Mai 2019, bis 10:15 im Hörsaal

1. Aufgabe

(6 Punkte)

- 1.) Sei $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $g(0) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Für welche Werte von α ist die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} g(x) & \text{für } x \geq 0, \\ -g(-x) & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

stetig auf ganz \mathbb{R} ?

- 2.) Beweisen oder widerlegen Sie: Die Funktion $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x < \sqrt{2}, \\ 0 & \text{für } x > \sqrt{2}, \end{cases}$$

ist stetig auf ganz \mathbb{Q} .

- 3.) Untersuchen Sie $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, wobei

$$T(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ oder } x = 0, \\ \frac{1}{n} & \text{für } x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, m, n \text{ teilerfremd,} \end{cases}$$

auf Stetigkeit.

2. Aufgabe

(4 Punkte)

Sei $D \subset \mathbb{R}$ und seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Weiter seien $\Phi, \varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\Phi := \max\{f, g\}, \quad \Phi(x) := \max\{f(x), g(x)\},$$

$$\varphi := \min\{f, g\}, \quad \varphi(x) := \min\{f(x), g(x)\}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass Φ und φ stetig sind, wenn f und g stetig sind.

Bitte wenden.

3. Aufgabe

(6 Punkte)

Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie für $x \in \mathbb{R}$ folgende Grenzwerte:

1.) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1}$,

2.) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 3x})$,

3.) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0}$, wobei $a_n, b_m \neq 0$.

Total: 16