Freie Universität Berlin SoSe 19
Institut für Mathematik
Prof. Dr. K. Polthier, H.-S. Lipschütz Status: 14. Mai 2019

Analysis I – Hausaufgabe 5

Abgabe: 21. Mai 2019, bis 10:15 im Hörsaal

---

1. Aufgabe (4 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N}$ und die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ bzw. } b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass beide Folgen gegen denselben Grenzwert konvergieren.

2. Aufgabe (4 Punkte)
Zeigen oder widerlegen Sie (mit Begründung) die folgenden Aussagen:

1.) Hat eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau einen Häufungspunkt, so ist (a_n) eine konvergente Folge.

2.) Es gibt keine reelle Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit (abzählbar) unendlich vielen Häufungspunkten.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

1.) a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$,

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$,

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2 + n}{n^3+1}$.

2.) Es sind $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$. Bestimmen Sie damit die Grenzwerte der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^s}$ für $s \in \{2, 4\}$.

4. Aufgabe (4 Punkte)

1.) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen mit $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots$. Zeigen Sie, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ genau dann konvergiert, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergiert.

2.) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ konvergiert.

Total: 16