Freie Universität Berlin SoSe 19
Institut für Mathematik
Prof. Dr. K. Polthier, H.-S. Lipschütz Status: 3. Mai 2019

Analysis I – Hausaufgabe 4

Abgabe: 14. Mai 2019, bis 10:15 im Hörsaal

---

1. Aufgabe (6 Punkte)

Geben Sie eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ und reelle Nullfolgen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sodass die folgenden Fälle eintreten. Zeigen Sie explizit, dass die von Ihnen angegebenen Folgen das Geforderte erfüllen.

1.) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = -\infty$,

2.) $\lim_{n\to\infty}(a_n c_n) = \alpha$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig,

3.) $(a_n d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, aber nicht konvergent.

2. Aufgabe (5 Punkte)

1.) Untersuchen Sie, ob die folgenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent sind:

a) Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine positive reelle Folge mit $(c_1 + c_2 + \ldots + c_n) \to \infty$. Definiere $a_n = \frac{b_1c_1+b_2c_2+\ldots+b_nc_n}{c_1+\ldots+c_n}$.

b) $a_n = n - \frac{2}{n}$.

2.) Zeigen Sie, dass $a_1 := 1$, $a_{n+1} := \frac{2+a_n}{1+a_n}$ eine Cauchy-Folge ist. Konvergiert diese in $\mathbb{Q}$?

3. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge, die $|a_{n+1} - a_n| \leq \lambda |a_n - a_{n-1}|$ für $\lambda \in [0,1)$ und $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Zeigen Sie, dass (a_n) eine Cauchy-Folge ist. Ist die Voraussetzung $\lambda \in [0,1)$ notwendig? Beweisen Sie Ihre Antwort oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Total: 16