Freie Universität Berlin SoSe 19
Institut für Mathematik
Prof. Dr. K. Polthier, H.-S. Lipschütz Status: 15. April 2019

Analysis I – Hausaufgabe 1

Abgabe: 23. April 2019, bis 10:15 im Hörsaal

---

1. Aufgabe (8 points)

Zeigen Sie die folgenden Behauptungen mittels vollständiger Induktion für $n \in \mathbb{N}$:

1.) $\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$,
2.) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\sum_{k=1}^{n} k)^2$,
3.) 9 ist Teiler von $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$.

2. Aufgabe (4 points)

Zeigen Sie folgende Aussage mittels vollständiger Induktion: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $b > 0$. Dann gilt:

$$(n-1)a^n + b^n \geq na^{n-1}b \text{ für } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

mit Gleichheit genau für $a = b$.

3. Aufgabe (4 points)

Der *Binomialkoeffizient* α *über* n[I] ist für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ als

$$\binom{\alpha}{0} := 1 \text{ und } \binom{\alpha}{n+1} := \binom{\alpha}{n}\frac{\alpha - n}{n+1}$$

definiert.

Zeigen Sie die folgenden Aussagen für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$:

1.) $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}$,
2.) $\binom{-\frac{1}{2}}{n} = (-\frac{1}{4})^n \binom{2n}{n}$,
3.) $\binom{\alpha+\beta}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{n-k}\binom{\beta}{k}$.

Total: 16

[I] Für den Binomialkoeffizienten n über k gilt $\binom{n}{k} = \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(n-j)$. Analog kann man den Binomialkoeffizienten x über n verallgemeinern. Im Lauf der Vorlesung wird die *Binomialreihe* $\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$ als Potenzreihenentwicklung der Funktion $(1+x)^\alpha$ auftreten.