

Analysis II – Hausaufgabe 13

Abgabe: 28. Januar 2020, bis 10:15 im Vorlesungsraum

1. Aufgabe

(9 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme:

1.) $y' = 2xy + x, y(0) = 1,$

2.) $y' = \frac{x-4xy}{1+x^2}, y(1) = 1,$

3.) $y' = \frac{2y}{x} + 2x^3, y(2) = 20.$

2. Aufgabe

(3 Punkte)

Zeigen Sie, dass der Eindeutigkeitsatz nicht für die Differentialgleichung $y' = 2\sqrt{|y|}$ gilt. Bestimmen Sie alle Lösungen $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dieser Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung $\varphi(0) = 0$.

3. Aufgabe

(4 Punkte)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung, die global einer Lipschitz-Bedingung mit der Konstanten $L \in \mathbb{R}_{>0}$ genügt. Weiter seien $\varphi, \psi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei Lösungen von $y' = f(x, y)$.

Es seien $a \in I$ und $\delta := \|\varphi(a) - \psi(a)\|$. Zeigen Sie, dass

$$\|\varphi(x) - \psi(x)\| \leq \delta \cdot e^{L|x-a|} \text{ für alle } x \in I.$$

Total: 16