**Freie Universität Berlin** WiSe 19/20
**Institut für Mathematik**
Prof. Dr. K. Polthier, H.-S. Lipschütz Status: 13. Dezember 2019

# Analysis II – Hausaufgabe 9

Abgabe: 17. Dezember 2019, bis 10:15 im Vorlesungsraum

---

**1. Aufgabe** (4 Punkte)
Sei $\gamma : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x,z) \mapsto \gamma(x,z)$, eine stetig differenzierbare Funktion. Durch $\gamma(x,z) = 0$ ist der *Hauptmeridian* einer Rotaionsfläche $f(x,y,z) = \gamma(\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0$ gegeben. Zeigen Sie, dass $Df$ genau dann Rang 1 hat, wenn $\sqrt{x^2+y^2} \neq 0$.

**2. Aufgabe** (4 Punkte)
Seien $r \in \mathbb{R}_{>0}$ gegeben. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{M} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = r^2\} \subset \mathbb{R}^3$$

eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

**3. Aufgabe** (4 Punkte)
Sei $r \in \mathbb{R}_{>0}$ gegeben und $\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid ||x|| = r\}$. Zeigen Sie, dass für beliebiges $p \in \mathbb{S}^n$

$$T_p\mathbb{S}^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle p, v\rangle = 0\},$$

gilt, wobei $\langle .,. \rangle$ das euklidische Skalarprodukt und $||.||$ die von $\langle .,. \rangle$ induzierte Norm bezeichnet. Bestimmen Sie den Normalraum $N_p\mathbb{S}^n$.

**4. Aufgabe** (4 Punkte)
Nutzen Sie die in der Vorlesung vorgestellte *Methode der Verdickung*, um einen Torus von Geschlecht 3 (s.u.) zu parametrisieren.

Total: 16