**Freie Universität Berlin** WiSe 19/20
**Institut für Mathematik**
Prof. Dr. K. Polthier, H.-S. Lipschütz Status: 28. November 2019

# Analysis II – Hausaufgabe 7

Abgabe: 3. Dezember 2019, bis 10:15 im Vorlesungsraum

---

**1. Aufgabe** (5 Punkte)
Gegeben sei folgende Abbildung:

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (u,v) \mapsto \left(u^2 + v^2\right)^2 - u^2 + v^2.$$

1.) Skizzieren Sie $f$ und die Nullstellenmenge $\mathcal{N}_f = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid f(u,v) = 0\}$ von $f$.

2.) Stellen Sie einen Teil von $\left(u^2 + v^2\right)^2 - u^2 + v^2 = 0$ explizit als differenzierbare Funktion $v$ in $u$ dar. Begründen Sie Ihre Lösung.

**2. Aufgabe** (4 Punkte)
Gegeben sei $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto |\arctan(x) - \arctan(y)|$.

1.) Zeigen Sie, dass $d$ eine Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert.

2.) Ist der metrische Raum $(\mathbb{R}, d)$ vollständig? Zeigen Sie Ihre Behauptung.

**3. Aufgabe** (4 Punkte)
Sei $X$ eine Menge und $d : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass $d$ genau dann eine Metrik auf $X$ ist, wenn für alle $x, y, z \in X$ folgendes gilt:

1.) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

2.) $d(x,z) \leq d(y,x) + d(z,y)$.

**4. Aufgabe** (3 Punkte)
Gegeben sei $f : \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$. Bestimmen Sie alle Fixpunkte von $f$.

Total: 16