

Analysis II – Hausaufgabe 5

Abgabe: 19. November 2019, bis 10:15 in den Fächern (A3/A7)

1. Aufgabe

(4 Punkte)

Gegeben sei die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} \frac{x_1^2 x_2}{x_1^4 + x_2^2} & \text{für } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x_1, x_2) = (0, 0). \end{cases}$$

Untersuchen Sie f in $(0, 0)$ auf Stetigkeit und untersuchen Sie, ob in $(0, 0)$ alle Richtungsableitungen von f existieren.

2. Aufgabe

(4 Punkte)

Gegeben sei die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2, x_3) \mapsto \cos(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3 - 1.$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung T_2 von f in $(0, 0)$. Skizzieren Sie T_2 .

3. Aufgabe

(3 Punkte)

Zeigen Sie, dass es für alle $n, m \in \mathbb{N}, m \geq 2$, stetig differenzierbare Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und Punkte $a, b \in \mathbb{R}^n$ derart gibt, dass

$$f(a) - f(b) \neq f'(x)(a - b) \text{ für alle } x \in \{(1 - t)a + tb \mid t \in [0, 1]\}.$$

4. Aufgabe

(5 Punkte)

Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ zwei kompakte Intervalle und $g, h : I \rightarrow J$ differenzierbar. Weiter sei $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2)$ stetig und die partielle Ableitung von f nach x_1 existiere und sei stetig. Bestimmen Sie die Ableitung der durch

$$F(x_1) := \int_{g(x_1)}^{h(x_1)} f(x_1, x_2) dx_2$$

definierten Funktion $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ mithilfe der Kettenregel.

Zur Illustration zum Thema Taylorpolynome siehe die folgenden Seiten.

Total: 16

Die Taylor-Reihenentwicklung

Anfang des 18. Jh. stellte *Brook Taylor* (1685–1731) die berühmte Formel

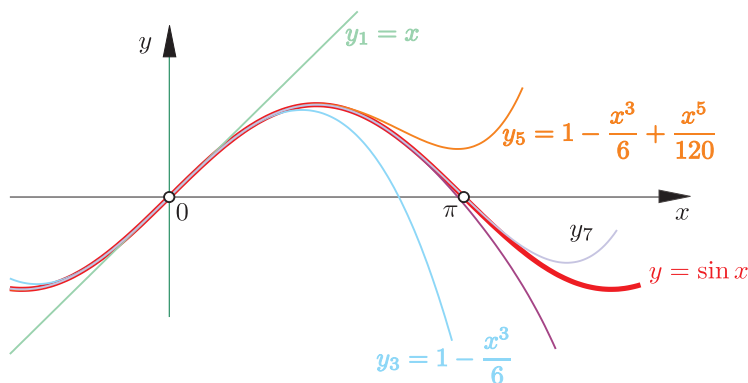
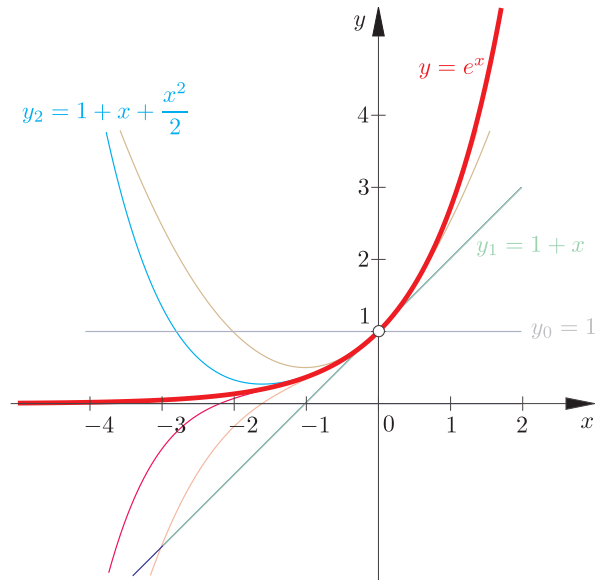
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

auf, mit derer sich eine Funktion f durch eine Reihe darstellen lässt. Für die „Entwicklungsstelle“ $a = 0$ ergeben sich z. B. für die Exponentialfunktion und die Sinusfunktion die folgenden Reihenentwicklungen:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \dots$$

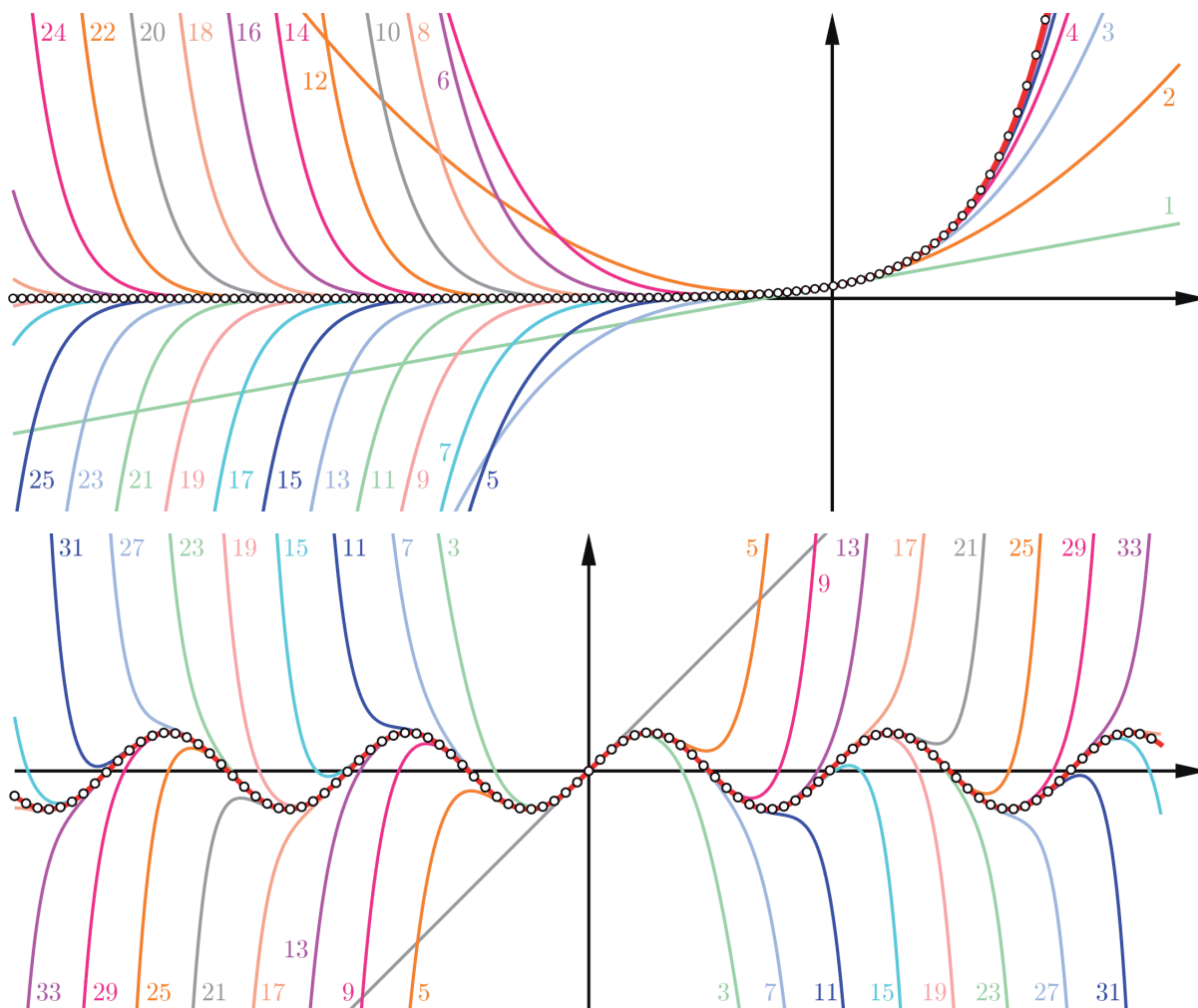
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Die Taylor-Formel funktioniert auch für Funktionen mit komplexen Zahlen (s. S. 293)!



Verwendet man von der Taylorreihe nur die ersten Glieder, so erhält man approximierende Polynomfunktionen. Die beiden Bilder illustrieren am Beispiel der Exponential- und Sinusfunktion, wie die Polynome aussehen, wenn man „vorzeitig abbricht“: Nahe der Entwicklungsstelle weichen die Polynome niedrigeren Grades kaum von der Funktion ab.

Mit zunehmender x -Differenz haben die Näherungsfunktionen jedoch kaum noch etwas mit der Zielfunktion gemeinsam.



Die Bilder zeigen die Annäherung der Exponentialfunktion (oben) bzw. Sinusfunktion (unten) durch Polynome mit immer größerem Grad. Die Funktionen bleiben immer länger an der Zielfunktion, diver-

gieren aber rasch, wenn der Beitrag mit dem höchsten Exponenten $|x^n/n!|$ nicht klein genug ist. So ist z. B. der Wert von $|x^{30}/30!|$ für $|x| < 5,5$ kleiner als 10^{-10} , nimmt dann aber rasch zu.

