Freie Universität Berlin SoSe 18
Institut für Mathematik
Dr. A. Constantinescu, H.-S. Lipschütz Stand: 22. Mai 2018

Elementargeometrie – Hausaufgabe 05

Abgabe: 29. Mai 2018, 12:15

---

1. Aufgabe (5 Punkte)

1.) Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V)$ eine Projektion, es gilt also $f^2 := f \circ f = f$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Für $v \in \mathrm{Bild}(f)$ gilt $f(v) = v$.

b) V ist die direkte Summe von $\mathrm{Kern}(f)$ und $\mathrm{Bild}(f)$, es ist also zu zeigen, dass $\mathrm{Kern}(f) \cap \mathrm{Bild}(f) = \{0\}$ und $\mathrm{Kern}(f) + \mathrm{Bild}(f) = V$.

2.) Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$ und $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V)$ eine Projektion. Zeigen Sie, dass f genau dann selbstadjungiert[1] ist, wenn $\mathrm{Kern}(f) \perp \mathrm{Bild}(f)$ gilt, d.h. für alle $v \in \mathrm{Kern}(f)$ und alle $w \in \mathrm{Bild}(f)$ gilt $\langle v, w \rangle = 0$.

2. Aufgabe (6 Punkte)
Gegeben seien die affinen Räume

$$(\mathbb{A}, V, \varphi_{\mathbb{A}}) = (\mathbb{R}_{\leq 1}[t], \mathbb{R}_{\leq 1}[t], \mathrm{id}) \text{ und } (\mathbb{B}, W, \varphi_{\mathbb{B}}) = (\mathbb{R}_{\leq 2}[t], \mathbb{R}_{\leq 2}[t], p - 4).$$

Weiter sei durch $B_V = \{t, 1\}$ eine Basis von V gegeben und durch $B_W = \{1, t+1, t^2+1\}$ eine Basis von W gegeben. Bestimmen Sie die Matrixdarstellung von

$$f : \mathbb{A} \to \mathbb{B},\ p = \alpha t + \beta \mapsto \frac{\alpha^2}{2} t^2 + \beta t + 4$$

bzgl. der angegebenen Basen.

3. Aufgabe (5 Punkte)
Gegeben sei der affine euklidische Standardraum $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ und die Punkte $A = (0, 2)$ und $B = (2, 2)$.

1.) Bestimmen Sie rechnerisch den Abstand, den die Punkte C und D zueinander haben, wenn C und D die Punkte sind, die denselben Abstand zu A und B haben.

[1] $f \in \mathrm{Hom}(V,V)$ heißt *selbstadjungiert* bzgl. $\langle .,. \rangle$, wenn $\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle$ für alle $v, w \in V$ gilt.

2.) Bestimmen Sie $v \in \mathbb{R}^2$, so dass $g = A + \mathrm{Span}(\{v\})$ die Gerade durch die Punkte A und C ist.

3.) Bestimmen Sie den Winkel zwischen der Geraden g und der Geraden g', die durch die Punkte C und D läuft.

4.) Illustrieren Sie Ihre Ergebnisse mit einer Skizze.

Total: 16