Freie Universität Berlin
Zuse Institut Berlin (ZIB)
Prof. Dr. H. Siebert, Dr. Susanna Röblitz, Dr. T. Dierkes,

9. Übungsblatt zur Vorlesung
Höhere Analysis
Sommersemester 2014

Abgabe: 24.06.2014 in der Vorlesung

Die Aufgaben sollen in Dreiergruppen abgegeben werden. Auf jedem Übungszettel müssen die Namen **aller** *Gruppenmitglieder sowie der Tutoriumstermin stehen. Bitte tackern Sie Ihre Lösungen zusammen.*

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z \cdot \overline{z}$. In welchen Punkten ist f komplex differenzierbar, in welchen holomorph?

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, und $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ eine reell differenzierbare Funktion, so dass $\phi \circ f = 0$ und $D\phi(f(z)) \neq 0$ für alle $z \in G$ gilt.
Zeigen Sie, dass f konstant ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Der *Hauptwert des Logarithmus* ist definiert als

$$Log : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to B := \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < Im(z) \leq \pi\}, \;\; z \mapsto ln|z| + i\, arg(z),$$

wobei ln der reelle natürliche Logarithmus und arg die Argumentfunktion ist.
Zeigen Sie, dass Log die Umkehrfunktion von $\exp|_B$ und holomorph auf $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ ist und berechnen Sie die Ableitung.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Definiere $\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_1(t) = exp(it)$ für alle $t \in [0, 2\pi]$, und $\gamma_2 : [0, \pi + 2] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2(t) = \exp(it)$ für $t \in [0, \pi]$ und $\gamma_2(t) = t - \pi - 1$ für $t \in]\pi, \pi + 2]$.
Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_{\gamma_2|_{[0,\pi]}} z^2 + 3z\, dz, \qquad \int_{\gamma_j} z^2 + 3z\, dz \quad \text{ und } \int_{\gamma_j} |z| dz$$

für $j \in \{1, 2\}$.