Freie Universität Berlin
Zuse Institut Berlin (ZIB)
Prof. Dr. H. Siebert, Dr. S. Röblitz, Dr. T. Dierkes

8. Übungsblatt zur Vorlesung
Höhere Analysis
Sommersemester 2014

Abgabe: 17.06.2014 in der Vorlesung

Die Aufgaben sollen in Dreiergruppen abgegeben werden. Auf jedem Übungszettel müssen die Namen **aller** *Gruppenmitglieder stehen. Bitte tackern Sie Ihre Lösungen zusammen.*

Aufgabe 1 (4 Punkte, *Harmonischer Oszillator*)
Wir wollen die analytische Lösung für das Anfangswertproblem finden, welches den harmonischen Oszillator beschreibt,

$$x'' + \omega^2 x = 0,\ \omega > 0, \quad x(0) = x_0,\ x'(0) = v_0.$$

Transformieren Sie dieses Problem in ein lineares System erster Ordnung der Form

$$y' = Ay \quad \text{mit} \quad y \in \mathbb{R}^2$$

und berechnen Sie desses Lösung. Ist diese Lösung stabil?

Aufgabe 2 (4 Punkte, *Stabilität eines chemischen Reaktionssystems*)
Wir betrachten das Reaktionsschemata

$$A \longrightarrow X, \quad B + X \longrightarrow Y, \quad 2X + Y \longrightarrow 3X, \quad X \longrightarrow E,$$

mit Ausgangsstoffen A und B sowie Endprodukt E. Alle Ratenkonstanten seien eins. Die beiden Differentialgleichungen, welche die Konzentrationen der beiden Zwischenprodukte X und Y beschreiben, haben folgende Form:

$$X' = A - BX + X^2Y - X, \quad Y' = BX - X^2Y.$$

(a) Wenn A und B (durch entsprechende Regelung ihrer Zufuhr) bei konstanten Konzentrationen $a > 0$ und $b > 0$ gehalten werden, welche Gleichgewichtskonzentrationen stellen sich dann für X und Y ein?

(b) Unter welchen Bedingungen an a und b ist dieses Gleichgewicht ein asymptotisch stabiler Fixpunkt?

Aufgabe 3 (4 Punkte, *Qualitative Analyse*)
Das folgende System soll nach seinen qualitativen Eigenschaften untersucht werden:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -y_1 + \frac{1}{6}y_1^3 - y_2 \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie die stationären Punkte des Systems und untersuchen Sie diese auf Stabilität.

(b) Tragen Sie in einer Skizze die jeweiligen lokalen Phasenportraits ein. Im Fall zweier reller Eigenwerte nutzen Sie dazu die zugehörigen Eigenvektoren.

Aufgabe 4 (2 Punkte, *Lyapunovfunktion*)
Untersuchen Sie die Stabilität des Fixpunkts $y^* = (0, 0)$ der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} y_1' &= -2y_1 + y_1 y_2^3 \\ y_2' &= -y_1^2 y_2^2 - y_2^3 \end{aligned}$$

mit einer geeigneten Lyapunovfunktion E. *(Hinweis: Machen Sie den Ansatz $E(y) = ay_1^2 + by_2^2$.)*

Aufgabe 5 (2 Punkte, *1. Integral*)
Sei $P : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar (ein Potential). Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$x'' = -\nabla P(x).$$

Formulieren Sie diese Gleichung als System 1. Ordnung in den Variablen x und $v = x'$ und zeigen Sie, dass

$$E(x, v) := \frac{1}{2} v^T v + P(x)$$

ein erstes Integral dieser Gleichung ist. Wie lautet die physikalische Interpretation?