

**8. Übungsblatt zur Vorlesung
Höhere Analysis
Sommersemester 2014**

Abgabe: 17.06.2014 in der Vorlesung

*Die Aufgaben sollen in Dreiergruppen abgegeben werden. Auf jedem Übungszettel müssen die Namen **aller** Gruppenmitglieder stehen. Bitte tackern Sie Ihre Lösungen zusammen.*

Aufgabe 1 (4 Punkte, *Harmonischer Oszillator*)

Wir wollen die analytische Lösung für das Anfangswertproblem finden, welches den harmonischen Oszillator beschreibt,

$$x'' + \omega^2 x = 0, \quad \omega > 0, \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0.$$

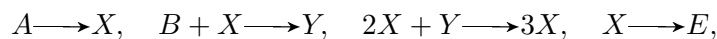
Transformieren Sie dieses Problem in ein lineares System erster Ordnung der Form

$$y' = Ay \quad \text{mit} \quad y \in \mathbb{R}^2$$

und berechnen Sie dessen Lösung. Ist diese Lösung stabil?

Aufgabe 2 (4 Punkte, *Stabilität eines chemischen Reaktionssystems*)

Wir betrachten das Reaktionsschemata



mit Ausgangsstoffen A und B sowie Endprodukt E . Alle Ratenkonstanten seien eins. Die beiden Differentialgleichungen, welche die Konzentrationen der beiden Zwischenprodukte X und Y beschreiben, haben folgende Form:

$$X' = A - BX + X^2Y - X, \quad Y' = BX - X^2Y.$$

- (a) Wenn A und B (durch entsprechende Regelung ihrer Zufuhr) bei konstanten Konzentrationen $a > 0$ und $b > 0$ gehalten werden, welche Gleichgewichtskonzentrationen stellen sich dann für X und Y ein?
- (b) Unter welchen Bedingungen an a und b ist dieses Gleichgewicht ein asymptotisch stabiler Fixpunkt?

Aufgabe 3 (4 Punkte, *Qualitative Analyse*)

Das folgende System soll nach seinen qualitativen Eigenschaften untersucht werden:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -y_1 + \frac{1}{6}y_1^3 - y_2 \end{aligned}$$

- (a) Bestimmen Sie die stationären Punkte des Systems und untersuchen Sie diese auf Stabilität.
- (b) Tragen Sie in einer Skizze die jeweiligen lokalen Phasenportraits ein. Im Fall zweier reeller Eigenwerte nutzen Sie dazu die zugehörigen Eigenvektoren.

Aufgabe 4 (2 Punkte, Lyapunovfunktion)

Untersuchen Sie die Stabilität des Fixpunkts $y^* = (0, 0)$ der Differentialgleichung

$$\begin{aligned}y_1' &= -2y_1 + y_1y_2^3 \\y_2' &= -y_1^2y_2^2 - y_2^3\end{aligned}$$

mit einer geeigneten Lyapunovfunktion E . (*Hinweis: Machen Sie den Ansatz $E(y) = ay_1^2 + by_2^2$.*)

Aufgabe 5 (2 Punkte, 1. Integral)

Sei $P : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar (ein Potential). Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$x'' = -\nabla P(x).$$

Formulieren Sie diese Gleichung als System 1. Ordnung in den Variablen x und $v = x'$ und zeigen Sie, dass

$$E(x, v) := \frac{1}{2}v^T v + P(x)$$

ein erstes Integral dieser Gleichung ist. Wie lautet die physikalische Interpretation?