Freie Universität Berlin
Zuse Institut Berlin (ZIB)
Prof. Dr. H. Siebert, Dr. S. Röblitz, Dr. T. Dierkes

7. Übungsblatt zur Vorlesung
Höhere Analysis
Sommersemester 2014

Abgabe: 10.06.2014 in der Vorlesung

Die Aufgaben sollen in Dreiergruppen abgegeben werden. Auf jedem Übungszettel müssen die Namen **aller** *Gruppenmitgleider stehen. Bitte tackern Sie Ihre Lösungen zusammen.*

Aufgabe 1 (8 Punkte)
Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y' = -1/\sqrt{y}, \quad y(0) = 1. \tag{1}$$

(a) Lösen Sie die Gleichung und zeigen Sie, dass die Lösung gegeben ist durch

$$y(t) = \left(1 - \frac{3}{2}t\right)^{2/3}, \quad t < 2/3.$$

(b) Verifizieren Sie, dass die Variationsgleichung für die Propagationsmatrix $J(t)$ gegeben ist durch

$$\frac{d}{dt}J(t) = \frac{1}{2-3t}J(t), \quad J(0) = 1.$$

(c) Lösen Sie die Variationsgleichung für J und zeigen Sie, dass deren Lösung gegeben ist durch

$$J(t) = \left(\frac{2}{2-3t}\right)^{1/3}, \quad t < 2/3.$$

(d) Bestimmen Sie die punktweise Kondition $\kappa_0(t)$ sowie die Intervallkondition $\kappa[0, \frac{2}{3} - \epsilon]$, $\epsilon > 0$. Welche Aussage können Sie über die Lösung von (1) zum Zeitpunkt $t = 0.5$ machen, wenn die gestörte Anfangsbedingung $y(0) = 1.1$ lautet?

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Berechnen Sie (möglicherweise komplexe) Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen:

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Man betrachte eine Gleichung der Form $y' + y = u(t)$. Ziel der Regelungstechnik ist es, die Funktion $u(t)$ so zu bestimmen, dass sich asymptotisch ein gewünschter stabiler Zustand y_d einstellt, d.h., $y_d = \lim_{t\to\infty} y(t)$. Aus praktischen Gründen betrachtet man folgende Ansätze:

(a) P-Regler (P wie "proportional")

$$u(t) := K_P(y_d - y(t)), \quad K_P > 0.$$

Stellen Sie die Differentialgleichung für das geregelte System auf. Welcher stationäre Punkt stellt sich ein? Ist er stabil?

(b) PI-Regler (I wie "integrierend")

$$u(t) := K_P(y_d - y(t)) + K_I \int_0^t (y_d - y(s))ds, \quad K_P, K_I > 0.$$

Formulieren Sie hierzu ein Differentialgleichungssystem in den Variablen (u, y). Welcher stationäre Punkt stellt sich nun ein? Ist er stabil? Für welche Wahl der Parameter erhält man ein schwingendes Verhalten?