Zuse Institut Berlin (ZIB)
Freie Universität Berlin
Dr. H. Siebert, Dr. S. Röblitz, T. Dierkes

Optionales 12. Übungsblatt zur Vorlesung
Höhere Analysis
Sommersemester 2014

Abgabe: 17.07.2014, bei der Klausureinsicht oder direkt bei T. Dierkes

Sie können die Aufgaben auf diesem Blatt nutzen, um Zusatzpunkte für die Übung zu sammeln, falls nötig.
Die Aufgaben sollen in Dreiergruppen abgegeben werden. Auf jedem Übungszettel müssen die Namen **aller** *Gruppenmitgleider sowie der Tutoriumstermin stehen. Bitte tackern Sie Ihre Lösungen zusammen.*

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei γ eine geschlossene Kurve in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass für all $z \in \mathbb{C}$, die in der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus sp(\gamma)$ liegen, $n(\gamma, z) = 0$ gilt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und z_0 eine isolierte Singularität der holomorphen Funktion $f : G \to \mathbb{C}$. Sei $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ die Laurentreihenentwicklung von f um z_0. Beweisen Sie die Bemerkung aus der Vorlesung, dass z_0 genau dann ein Pol von f ist, wenn ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so existiert, dass $a_{-n_0} \neq 0$ und $a_{-n} = 0$ für alle $n > n_0$ gilt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $S \subseteq G$ diskret, f holomorph in $G \setminus S$ und γ eine nullhomotope Kurve in G. Zeigen Sie, dass $E := \{z \in S \mid n(\gamma, z) \neq 0\}$ endlich ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Bestimmen Sie für

$$f : \mathbb{C} \setminus \{i, -i\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{1}{(z^2+1)^3}$$

die isolierten Singularitäten und zugehörigen Residuen, und berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3}\, dx\,.$$