Freie Universität Berlin
Zuse Institut Berlin (ZIB)
Prof. Dr. H. Siebert, Dr. Susanna Röblitz, Dr. T. Dierkes,

11. Übungsblatt zur Vorlesung
Höhere Analysis
Sommersemester 2014

Abgabe: 08.07.2014 in der Vorlesung

Die Aufgaben sollen in Dreiergruppen abgegeben werden. Auf jedem Übungszettel müssen die Namen **aller** *Gruppenmitglieder sowie der Tutoriumstermin stehen. Bitte tackern Sie Ihre Lösungen zusammen.*

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein offen, $z_0 \in U$ und $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion.
Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) f lässt sich in den Punkt z_0 holomorph fortsetzen (d.h. es existiert eine holomorphe Funktion $F : U \to \mathbb{C}$ mit $F|_{U\setminus\{z_0\}} = f$),

b) es existiert eine Umgebung V von z_0, so dass $f|_{V\setminus\{z_0\}}$ beschränkt ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine nicht-konstante holomorphe Funktion. Zeigen Sie, dass das Bild von f dicht in $\mathbb{C}$ liegen muss.

(b) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit beschränktem Imaginärteil. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Berechnen Sie die Integrale

$$\text{(a)} \int_{\gamma_1} \frac{1}{(z+1)^3(z-1)}\,dz \quad \text{und} \quad \text{(b)} \int_{\gamma_2} \frac{\sin z}{z+\frac{i}{2}}\,dz,$$

wobei $\gamma_1 : [0, 6\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto -1 + \exp(-it)$ sei und $\gamma_2 : [-\pi, 3\pi] \to \mathbb{C}$ definiert ist durch $\gamma_2(t) = \exp(it)$ für $t \in [-\pi, \pi[$, $\gamma_2(t) = (1 + t - \pi)\exp(it)$ für $t \in [\pi, 2\pi[$ und $\gamma_2(t) = (1 + 3\pi - t)\exp(it)$ für $t \in [2\pi, 3\pi]$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet. Seien $f, g : \overline{G} \to \mathbb{G}$ stetig und holomorph in G. Es gelte $|f(z)| \leq |g(z)|$ für alle $z \in \partial G$.
Zeigen Sie, dass g eine Nullstelle besitzt oder $|f(z)| \leq |g(z)|$ für alle $z \in G$ gilt. Gilt die Aussage auch für unbeschränktes Gebiet G?